SSIS PUGLIA

Scuola Regionale Interateneo di Specializzazione per la Formazione degli Insegnanti della Scuola Secondaria

Relazione Finale Sull'attività Di Tirocinio

Indirizzo: Fisico-Informatico-Matematico

Classe di abilitazione: A047 (Matematica)

Supervisore: Prof. Lucio Vernich
Tutor: Prof.essa Giuseppina Fiorino

Specializzanda: Maria Spagnulo

Anno Accademico 2006/07

Indice

Unità didattica di Matematica: Le Equazioni di secondo grado

INTRODUZIONE

Con la presente unità didattica si vuole delineare un percorso che consenta allo studente di comprendere il concetto di Equazione di secondo grado e distinguerne i vari casi.

All'inizio di ogni lezione ho riassunto gli argomenti della lezione precedente tramite un rapido scambio di battute con il gruppo classe e tramite l'utilizzo di schematizzazioni, così come al termine di ogni lezione ho tracciato un breve riassunto evidenziando le parti più significative degli argomenti trattati. Ho esplicitato le conoscenze e le competenze richieste per ogni porzione di contenuto. Al termine del percorso ho proposto una prova con scopo di verifica formativa/sommativa sul raggiungimento degli obiettivi dichiarati. Il compito, corretto e valutato, è stato riconsegnato in classe con una correzione collettiva e un commento individualizzato per ogni alunno.

COLLOCAZIONE NEL CURRICOLO

L'argomento va inserito nel secondo quadrimestre di una II Istituto Professionale.

TEMPO RICHIESTO: 8 ORE

PREREQUISITI

- ✓ Saper eseguire operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione con numeri naturali, razionali e interi.
- ✓ Saper calcolare MCD e mcm.
- ✓ Saper eseguire operazioni in cui compaiono potenze a base razionale ed esponente intero.
- ✓ Conoscere e saper utilizzare le proprietà delle potenze a base razionale ed esponente intero.
- ✓ Saper eseguire operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione tra monomi e polinomi.
- ✓ Saper operare con le potenze intere di monomi e polinomi.
- ✓ Saper fare raccoglimenti totali e parziali.
- ✓ Saper riconoscere e sviluppare prodotti notevoli
- ✓ Saper scomporre un polinomio in fattori primi.
- ✓ Saper calcolare MCD e mcm di monomi e polinomi.
- ✓ Conoscere e saper applicare la legge di annullamento del prodotto.
- ✓ Sapere qual è il significato di una equazione in una incognita.

- ✓ Conoscere e saper applicare i "principi di equivalenza" delle equazioni.
- ✓ Saper risolvere equazioni di primo grado numeriche, intere a coefficienti interi e razionali.
- ✓ Saper calcolare espressioni contenenti i radicali.
- ✓ Sapere razionalizzare un denominatore contenente radicali.

OBIETTIVI COGNITIVI

- ✓ Definire un'equazione di secondo grado in forma normale e stabilire quando è completa o incompleta;
- ✓ Saper riconoscere un'equazione di secondo grado;
- ✓ Saper scrivere in forma normale un'equazione di II grado;
- ✓ Saper riconoscere i coefficienti di un'equazione di secondo grado;
- ✓ Saper classificare le equazioni di secondo grado in pure, spurie, monomie e complete;
- ✓ Saper riconoscere le relazioni tra i coefficienti di un'equazione di secondo grado e le sue soluzioni;
- ✓ Conoscere i vari metodi di risoluzione

OBIETTIVI OPERATIVI

- ✓ Saper risolvere le equazioni di secondo grado pure, spurie e monomie;
- ✓ Saper risolvere le equazioni di secondo grado complete;
- ✓ Saper discutere il numero delle soluzioni in base al segno del discriminante;
- ✓ Saper scomporre i trinomi di secondo grado
- ✓ Saper verificare se un dato valore è o non è soluzione di un'equazione di secondo grado;
- ✓ Individuare le relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di secondo grado applicandole nella risoluzione di problemi vari;

OBIETTIVI FORMATIVI

- ✓ Uso di un linguaggio pertinente e appropriato
- ✓ Saper scegliere la migliore strategia per la risoluzione di problemi
- ✓ Sviluppare capacità intuitive, logiche, analitiche e sintetiche
- ✓ Acquisire l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente quanto viene via via appreso
- ✓ Acquisire l'attitudine a studiare ogni questione attraverso l'analisi di tutti i suoi fattori.

MEZZI

- Libro di testo
- Lavagna e gesso
- Fotocopie
- Lucidi
- Presentazione con MS-Power Point
- Laboratorio d'Informatica

CONTENUTI

SUDDIVISIONE MACROSCOPICA:

- **Contenuto A: 1 ora**
  - *Introduzione alle equazioni di secondo grado*
  - *Definizioni*
- **Contenuto B: 2 ore**
  - *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta pura*
  - *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta spuria*
  - *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta monomia*
- **Contenuto C: 2 ore**
  - *Risoluzione di un'equazione di secondo grado completa*
  - *Il discriminante e le soluzioni*
  - *Schematizzazioni*
- **Contenuto D: 2 ora**
  - *La relazione tra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado*
  - *Scomposizione di un trinomio di secondo grado*
  - *Laboratorio d'Informatica: Utilizzo del foglio di Excel*
- **Contenuto E: 1 ora**
  - *Verifica formativa/sommativa*
  - *Attività di recupero*

METODOLOGIE

- "Problem-solving"
- Intergruppo
- Lezione frontale
- Lezione in laboratorio d'Informatica: utilizzo del foglio Excel;
- Esercitazioni guidate.

- ✓ Esercizi a casa

VERIFICA E VALUTAZIONE.

Le verifiche saranno di due tipi in itinere e sommativa, la valutazione seguirà la griglia di valutazione del POF.

- Tipo di verifica: orale, scritta (tramite prova semistrutturata).

ATTIVITÀ DI RECUPERO

Ripetizione dei contenuti fondamentali attraverso l'utilizzo di schematizzazioni e di lezioni frontali e svolgimento di esercitazioni in classe e a casa..

VERIFICA DI RECUPERO

- Tramite prova orale e scritta.

SUDDIVISIONE DETTAGLIATA DEI CONTENUTI

CONTENUTO A:

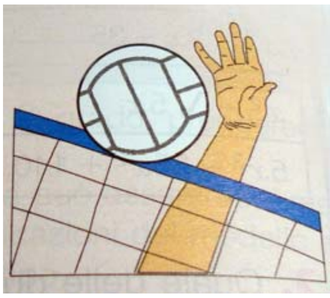
Introduzione alle Equazioni di secondo grado

INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

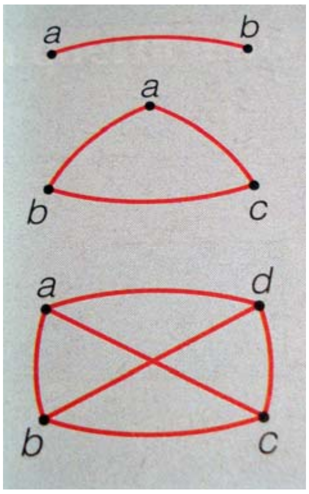
Per introdurre ai ragazzi lo studio delle equazioni di secondo grado ho proposto loro un semplice quanto interessante problema stimolo:

? Problema stimolo:

In un torneo di beach-volley, ogni squadra ha giocato con tutte le altre una sola volta e, complessivamente, si sono svolti 6 incontri. Quante sono le squadre che hanno partecipato al torneo?



La soluzione del problema proposto può essere individuata graficamente per "tentativi":



(2 squadre; 1 incontro)

(3 squadre; 3 incontri)

(4 squadre; 6 incontri)

Il modello algebrico del problema, invece, è basato sul seguente ragionamento:

Se x indica il numero delle squadre, ogni squadra incontra le rimanenti (x-1). In tal caso verrebbero svolti x·(x-1) incontri nei quali però, ogni incontro è contato due volte (*ab*, *ba*, *ac*, *ca*, ….) e quindi:

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2}=6$$

Infatti:

Per 2 squadre il numero degli incontri è: $\frac{2\cdot(2-1)}{2}=1$

Per 3 squadre il numero degli incontri è: $\frac{3\cdot(3-1)}{2}=3$

Per 4 squadre il numero degli incontri è: $\frac{4\cdot(4-1)}{2}=6$

Da cui:

$$x^2 - x - 12 = 0 \text{ con } x \in \mathbf{N}$$

L'equazione ottenuta è di secondo grado in x (in quanto il massimo esponente dell'incognita x è 2). Risolvendo tale equazione determineremo il numero delle squadre pervenendo allo stesso risultato già ottenuto graficamente.

Osservazione: Con questo semplice ed interessante problema stimolo ho ottenuto l'attenzione degli studenti ed il loro coinvolgimento ponendoli di fronte ad un problema non solo matematico. Inoltre ho fatto capire loro che ci sono molti altri problemi non puramente matematici che per essere risolti hanno bisogno di equazioni di secondo grado. È pertanto necessario saper risolvere questi tipi di equazioni.

☞ ***Formalizzazione***

***Definizione 1*:**

Si definisce equazione di secondo grado un'equazione dove il massimo valore dell'esponente con cui compare la variabile, generalmente indicata con la lettera x, è due.

La forma più generale (*forma normale*) di equazione di secondo grado è:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0 \qquad (*)$$

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali e si chiamano *primo*, *secondo* e *terzo* coefficiente dell'equazione. In particolare a indica il coefficiente della x^2, b il coefficiente della x e c è detto *termine noto*.

***Esempi*:**

1. L'equazione: $5x^2 + 3x - 7 = 0$ è di secondo grado in forma normale e i tre coefficienti sono:

   $$a = 5 \qquad b = 3 \qquad c = -7$$

2. L'equazione: $4x^2 - 3x = 0$ è di secondo grado in forma normale e i tre coefficienti sono:

   $$a = 4 \qquad b = -3 \qquad c = 0$$

3. L'equazione: $8x^2 - 7 = 0$ è di secondo grado in forma normale e i tre coefficienti sono:

   $$a = 8 \qquad b = 0 \qquad c = -7$$

***Definizione 2*:**

Una equazione di secondo grado, nell'incognita x, ridotta a forma normale, si dice ***completa*** se i coefficienti a, b, c sono tutti diversi da zero.

***Esempio*:**

L'equazione: $5x^2 + 3x - 7 = 0$ dell'*esempio 1* precedente è completa.

Definizione 3:

Una equazione di secondo grado, nell'incognita x, ridotta a forma normale, si dice ***incompleta spuria***, se manca il *termine noto* (ossia $c = 0$).

Essa si presenta nella forma: $ax^2 + bx = 0$

Esempio:

L'equazione: $4x^2 - 3x = 0$ dell'*esempio 2* precedente è incompleta spuria.

Definizione 4:

Una equazione di secondo grado, nell'incognita x, ridotta a forma normale, si dice ***incompleta pura***, se manca il *termine in x* (ossia $b = 0$).

Si presenta nella forma: $ax^2 + c = 0$

Esempio:

L'equazione: $8x^2 - 7 = 0$ dell'*esempio 3* precedente è incompleta pura.

Definizione 5:

Una equazione di secondo grado, nell'incognita x, ridotta a forma normale, si dice ***incompleta monomia***, se manca sia il *termine in x* sia il *termine noto* (ossia $b = c = 0$).

Si presenta nella forma: $ax^2 = 0$

Esempio:

L'equazione: $8x^2 = 0$ è incompleta monomia.

Risolvere in $\Re$ un'equazione di secondo grado significa determinare l'insieme S dei numeri reali che la verificano. Tali numeri si dicono *soluzioni* o *radici*[1] dell'equazione mentre S è l'insieme delle soluzioni. Un'equazione di secondo grado è risolubile in $\Re$ se l'insieme delle soluzioni non è vuoto ($S \neq \varnothing$), mentre è impossibile se l'insieme delle soluzioni è vuoto ($S = \varnothing$).

Esempio:

L'equazione: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha per soluzioni i numeri 2 e 3. Infatti, sostituendo a x il numero 2, si ottiene:

$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$

E, sostituendo il numero 3:

$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$.

Pertanto $S = \{2, 3\}$

[1] Una soluzione o radice dell'equazione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

CONTENUTO B:

La Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta

- *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta pura*
- *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta spuria*
- *Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta monomia*

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO INCOMPLETA PURA

? Domanda stimolo:

Risolvere l'equazione:

$$3x^2 - 12 = 0$$

Per risolverla ho indirizzato gli studenti ad utilizzare le regole già viste per le equazioni di primo grado:

- Per prima cosa per il primo principio di equivalenza si trasporta il termine noto, ossia il -12 dall'altra parte dell'uguale cambiandolo di segno:

$$3x^2 = 12$$

- Poiché mi interessa trovare il valore della x la stessa dovrà essere lasciata senza altri termini, quindi applichiamo il secondo principio dividendo entrambe i termini per 3:

$$x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$$

- ora siccome cerco la x mentre ho x^2 per fare in modo che x^2 diventi x dovrò fare la radice quadrata ad entrambe i termini:

$$x = 2$$

- Tuttavia siccome stiamo trattando radicali algebrici, in quanto cerchiamo tutti i valori che elevati al quadrato ci danno il radicando dobbiamo inserire il simbolo "±", in quanto sia 2 che -2 elevati al quadrato danno come risultato 4.

Osservazione: Qui è stato più difficile far accettare ai ragazzi questo risultato!

? Domanda stimolo:

Quale sarebbe stata la soluzione se invece di $x^2 = 4$ avessimo ottenuto $x^2 = -4$?

Ragionando in modo analogo al caso precedente ho portato i ragazzi a "ricordare" che nessun numero reale elevato al quadrato dà come risultato un numero negativo e pertanto in questo caso l'equazione è ***impossibile***, cioè non ammette soluzioni reali.

☞ ***Formalizzazione***

L'equazione ha la forma

$$ax^2 + c = 0$$

L'equazione si può scrivere nella forma:

$$ax^2 = - c$$

Pertanto

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Il primo membro dell'espressione precedente è positivo, poiché è un quadrato, allora deve esserlo anche il secondo membro. Se a e c sono concordi il secondo membro è negativo in quanto la frazione è preceduta dal segno meno, di conseguenza non si hanno radici, reali essendo il primo membro positivo. Se invece a e c sono discordi si hanno due radici reali opposte che si ottengono dalla seguente relazione:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Osservazione: Se sotto radice compare un numero negativo l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, quindi:

Un'equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + c = 0$, con a e c discordi, ha due soluzioni reali e opposte:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Se a e c sono concordi, non ha soluzioni reali.

Esercizi (svolti in classe):

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado incomplete pure:

$$5\,x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 +12 = 0$$

$$-x^2 - 5 = 0$$

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO INCOMPLETA SPURIA

? Domanda stimolo:

Risolvere l'equazione:

$$3\,x^2 - 12x = 0$$

Per risolverla ho indirizzato gli studenti ad utilizzare le già note regole di scomposizione di polinomi raccogliendo a fattor comune la x prima dell'uguale:

$$x\,(3x - 12) = 0$$

ed utilizzando il ***principio di annullamento del prodotto*** che dice che:

un prodotto è zero se e solo se almeno uno dei suoi fattori e' zero

siccome devo trovare i valori per cui il prodotto è zero, per il principio di annullamento del prodotto dovrò porre ogni fattore uguale a zero, quindi:

$$x = 0 \qquad\qquad 3x - 12 = 0$$

A questo punto, $x = 0$ è già una soluzione dell'equazione, mentre $3x - 12 = 0$ è un'equazione di primo grado facilmente risolubile in quanto si è già studiato il metodo di risoluzione, da cui si ricava:

$$3x = +\,12 \quad \Rightarrow \quad x = 12/3 \qquad x = 4$$

e pertanto le soluzioni sono:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 4$

Formalizzazione

L'equazione ha la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Si raccoglie la x a fattor comune:

$$x\,(a\,x + b\,) = 0$$

Si pone ogni fattore uguale a zero per la legge dell'annullamento del prodotto:

$$x = 0$$

$$a\,x + b = 0$$

Si ottengono due equazioni di primo grado che danno come soluzione:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

In generale, quindi:

Un'equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx = 0$ *ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla:*

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

L'insieme delle soluzioni è pertanto S = $\left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$

Esercizi (svolti in classe):

$$2x^2 + 3x = 0$$

$$4x - 2x^2 = 0$$

🕮 RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO INCOMPLETA MONOMIA

? Domanda stimolo:

Risolvere l'equazione:

$$3\,x^2 = 0$$

Per risolverla ho proposto agli studenti due diversi metodi utilizzando i metodi di risoluzione già visti per le equazioni di secondo grado incomplete pure e spurie:

I METODO:

Si isola la x^2 dividendo ambo i membri per 3, ottenendo così:

$$x^2 = 0$$

da cui, facendo la radice quadrata si ottengono due soluzioni nulle:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$.

II METODO:

Si riscrive il monomio nel modo seguente:

$$x\,(3x) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene:

$$x = 0$$

oppure:

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Si ottengono quindi due soluzioni nulle.

☞ ***Formalizzazione***

Un'equazione di secondo grado del tipo $ax^2 = 0$ ha sempre due soluzioni reali coincidenti:

$$x_1 = x_2 = 0$$

In tal caso si dice che la soluzione $x = 0$ è doppia.

Esercizi (svolti in classe):

$$2\,x^2 = 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 0$$

CONTENUTO C:

La Risoluzione di un'equazione di secondo grado completa

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO COMPLETA

Approccio intuitivo

Ho proposto agli studenti di provare a risolvere l'equazione $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Ho guidato gli stessi nella risoluzione ricordando che il quadrato di un binomio $(a + b)^2 = 0$ è uguale al trinomio $a^2 + 2ab + b^2 = 0$.

? Domanda stimolo:

Il trinomio $x^2 + 10x - 24 = 0$ può essere un quadrato di binomio?

Gli studenti hanno facilmente risposto che non può essere a causa del segno meno del 24.

? Domanda stimolo:

È possibile trasformare il trinomio precedente in un'equazione del tipo:

$(x + A)^2 = B$, dove A e B rappresentano numeri reali?

Ho guidato gli studenti nella risposta a questo quesito procedendo nel modo seguente:

- Si isola il termine noto:

$$x^2 + 10x = 24$$

- Si scrive $10x$ come doppio prodotto: $2 \cdot (5) \cdot (x)$

  e lo si sostituisce nell'equazione: $x^2 + 2 \cdot (5) \cdot (x) = 24$

  Si capisce facilmente che il secondo termine del binomio cercato è 5.

- Aggiungiamo allora il quadrato di 5 ad ambo i membri:

$$x^2 + 2 \cdot (5) \cdot (x) + 5^2 = 24 + 5^2$$

  Il primo membro dell'equazione precedente è quindi il quadrato del binomio $x + 5$.

- Pertanto, possiamo scrivere:

$$(x + 5)^2 = 49$$

  Osserviamo che la A e la B cercate valgono rispettivamente 5 e 49.

- A questo punto possiamo ricavare, facendo la radice quadrata di ambo i membri, due equazioni di primo grado:

$$(x+5)^2 = 49 \left\langle \begin{array}{l} x + 5 = \sqrt{49} \Rightarrow x + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x + 5 = -\sqrt{49} \Rightarrow x + 5 = -7 \Rightarrow x_2 = -12 \end{array} \right.$$

Le soluzioni cercate sono pertanto:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = -12$.

Osservazione: Il metodo appena applicato prende il nome di *Metodo del completamento del quadrato.*

☞ **Formalizzazione**

Applichiamo ora il metodo del completamento del quadrato per cercare le soluzioni nel caso generale:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$$

Portiamo a secondo membro il termine noto c:

$$ax^2 + bx = - c$$

E dividiamo tutti i termini per a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Osservazione: In questo passaggio ho fatto notare agli studenti che abbiamo potuto dividere per a in quanto è stato supposto $a \neq 0$.

Scriviamo il termine $\frac{b}{a}x$ come doppio prodotto:

$$\frac{b}{a}x = 2x\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x^2 + 2x\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$$

Aggiungiamo ad ambo i membri il termine $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, completando così il quadrato:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

In questo modo il trinomio a primo membro è il quadrato del binomio $x + \frac{b}{2a}$; quindi:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

L'espressione al primo membro essendo un quadrato risulta essere sempre positiva o nulla. Pertanto, affinché l'equazione ammetta soluzioni reali, anche la frazione al secondo membro deve essere non negativa. Inoltre, poiché il denominatore della frazione è sempre positivo, il numeratore deve essere non negativo, cioè deve risultare:

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

Quindi, se $b^2 - 4ac \geq 0$, possiamo estrarre la radice quadrata:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da qui si ottiene quella che viene detta la ***formula risolutiva dell'equazione di secondo grado***:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esempio applicativo:

Calcolare le radici dell'equazione: $x^2 + 10x - 24 = 0$

Applicando la formula risolutiva:

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-10 \pm 14}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-10 - 14}{2} = -12 \\ \dfrac{-10 + 14}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Osservazione: Vista l'importanza della formula ho consigliato ai ragazzi di riscriverla ogni volta che la si usa, così, senza troppa fatica la si impara a memoria

🕮 IL DISCRIMINANTE E LE SOLUZIONI

? Domande stimolo:

Chi mi assicura l'esistenza o meno delle soluzioni di un'equazione di secondo grado?

Cosa succede ad esempio se il termine sotto la radice quadrata è negativo oppure nullo?

Formalizzazione

Per rispondere ai quesiti precedenti dobbiamo studiare l'espressione che sta sotto radice quadrata: $b^2 - 4ac$

Questa espressione prende il nome di ***discriminante*** della equazione o di ***delta*** *e* solitamente viene indicato con la nota lettera greca maiuscola : Δ.

Osservazione: Il termine discriminante deriva da "discriminare" che significa distinguere tra cose o persone. Infatti il discriminante serve per distinguere le equazioni di secondo grado in base al tipo di soluzioni che possono presentare.

Esaminando il segno del discriminante, è possibile stabilire "a priori", ossia senza ricercare le soluzioni con la formula risolutiva, se l'equazione assegnata ammette soluzioni reali oppure no.

In particolare si possono presentare tre casi:

1. $\Delta > 0$: l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
2. $\Delta = 0$: l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a}, \text{ cioè } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
3. $\Delta < 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali. Infatti non è possibile, nel campo dei numeri reali, estrarre la radice quadrata di un numero negativo.

Esercitazione:

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado complete:

- $5x^2 - 3x - 8 = 0$
- $4x^2 + 12x + 9 = 0$
- $3x^2 + 7x + 8 = 0$

SCHEMATIZZAZIONE:

Ho riassunto i vari casi dell'equazioni di secondo grado complete e incomplete nelle seguenti tabelle al fine di dare allo studente un valido supporto didattico sia in fase di studio che di ripasso:

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE			
Tipo di equazione	*Equazione*	*Soluzioni*	*Esempio*
Pura ($b = 0$, $c \neq 0$)	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$3x^2 - 12 = 0$ $x_1 = -2$ $x_2 = +2$
Spuria ($c = 0$, $b \neq 0$)	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$3x^2 - 12x = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 4$
Monomia ($b = c = 0$)	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$	$25x^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 0$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE		
Segno del discriminante	*Soluzioni*	*Esempio*
$\mathbf{\Delta > 0}$	Due radici reali e distinte: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + 10x - 24 = 0$ $\Delta = 196$ $x_1 = -12$ $x_2 = 2$
$\mathbf{\Delta = 0}$	Due radici reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$4x^2 - 4x - 24 = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$
$\mathbf{\Delta < 0}$	Non esistono soluzioni reali	$2x^2 + 3x + 3 = 0$ $\Delta = -15$

CONTENUTO D:

Relazioni tra coefficienti e soluzioni e scomposizione di un trinomio di secondo grado

- *La relazione tra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado*
- *Scomposizione di un trinomio di secondo grado*
- *Laboratorio d'Informatica: utilizzo del foglio di Excel*

LA RELAZIONE FRA LE RADICI E I COEFFICIENTI DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

? Domande stimolo:

Abbiamo potuto osservare, con la risoluzione di vari tipi di equazioni di secondo grado, che in generale, le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, dipendono dai valori dei coefficienti a, b e c. ma esistono relazioni particolarmente significative tra le soluzioni e i coefficienti?

Per rispondere alla domanda precedente consideriamo, ad esempio, l'equazione:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

Le cui soluzioni, indicate con x_1 e x_2, risultano:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

Calcoliamo la somma s e il prodotto p delle soluzioni:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Osserviamo a questo punto che:

La somma delle radici coincide con il rapporto $\frac{b}{a}$ cambiato di segno, ossia: $-\frac{b}{a} = \frac{-8}{4} = 2$;

mentre il prodotto coincide con il rapporto $\frac{c}{a}$, ossia: $\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$.

Formalizzazione

Quanto visto nell'esempio precedente si può estendere a qualsiasi equazione di secondo grado Infatti, date le soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sommando x_1 e x_2 si ottiene:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Moltiplicando x_1 e x_2 si ottiene:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Quindi:

La somma e il prodotto delle soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sono espresse dalle relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Queste relazioni permettono in particolari casi di ricavare le soluzioni di un'equazione di secondo grado senza applicare la formula risolutiva.

Infatti basta cercare quei numeri le cui somme ed il prodotti corrispondano ai numeri ottenuti mediante le relazioni.

Occorre notare che tali numeri sono facilmente ricavabili quando le soluzioni sono numeri interi.

Osservazione:

Le dimostrazioni delle relazioni di somma e prodotto valgono per una qualsiasi equazione di secondo grado, quindi anche nel caso in cui $\Delta < 0$, cioè quando l'equazione non ammette soluzioni reali. Di conseguenza, è sempre possibile determinare la somma e il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado, ma non sempre i valori delle singole soluzioni x_1 e x_2, perché, quando $\Delta < 0$, appartengono ad un insieme numerico non ancora studiato.

SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Durante lo scorso anno si sono studiati i vari procedimenti di fattorizzazione e, in particolare, quelli relativi alla scomposizione di un trinomio di secondo grado.

Tuttavia, non sempre risulta semplice scomporre un trinomio di secondo grado con tali metodi. Diamo ora un altro metodo di scomposizione per un trinomio del tipo $ax^2 + bx + c$, la cui equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni x_1 e x_2.

Raccogliamo a fattore comune a nel trinomio $ax^2 + bx + c$ e ricordiamo le relazioni relative alla somma e al prodotto delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Otteniamo:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] =$$
$$= a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2) =$$

Da cui, scomponendo in fattori il polinomio in parentesi tonde, risulta che:

$$a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Quindi:

Se un trinomio di secondo grado scritto in forma normale ha degli zeri[2] *reali, allora esso è scomponibile in un prodotto di tre fattori, di cui uno è il primo coefficiente (ossia il coefficiente del termine in x^2) e gli altri sono le differenze fra la variabile e gli zeri del trinomio:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- *Se il trinomio ha un solo zero reale, cioè $x_1 = x_2$ la scomposizione è la seguente*:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

- *Se il trinomio non ha zeri reali non si può scomporre in fattori*, cioè è *irriducibile*.

Esempio:

Scomporre in fattori il trinomio $5x^2 - 5x - 30$

Gli zeri del polinomio sono le soluzioni dell'equazione:

$$5x^2 - 5x - 30 = 0$$

Calcoliamo il $\Delta = 25 + 600 = 625 > 0 \Rightarrow$ l'equazione ha due radici reali e distinte.

Risolvendo l'equazione si trova: $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$.

La scomposizione del trinomio è quindi:

$$5x^2 - 5x - 30 = 5(x - 3)(x + 2).$$

[2] Le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$ sono anche dette ***zeri*** del trinomio $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$.

LABORATORIO D'INFORMATICA: UTILIZZO DEL FOGLIO DI EXCEL

Grazie all'utilizzo del foglio di Excel ho costruito questo semplice programma per risolvere le equazioni di secondo grado: inserendo i valori dei coefficienti esso calcola il valore del Δ e se questo è positivo o nullo anche il valore delle soluzioni (specificando se si tratta di soluzioni reali e distinte o reali e coincidenti), mentre se il Δ è negativo specifica che l'equazione data non ammette soluzioni reali.

EQUAZIONE DI 2° GRADO COMPLETA

Una equazione di 2° grado completa ha equazione $ax^2+bx+c=0$

CALCOLO DELLE SOLUZIONI

Inserisci i tre coefficienti dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ ***nelle apposite caselle:***

a= **2** **2x^2+3x+1=0**

b= **3**

c= **1**

Risulta **Δ=** **1** $x_{1}=$ -0,50 $x_{2}=$ -1,00

L'equazione ammette due soluzioni reali distinte.

I ragazzi si sono interessati molto a questo tipo di studio della matematica ed hanno fatto varie prove di verifica del programma con diverse equazioni che sono state svolte prima da loro utilizzando i metodi visti a lezione e poi col foglio di calcolo. Ho fatto notare loro quanto questo foglio risulti comodo nel caso in cui i coefficienti cominciano a diventare molto grandi.

CONTENUTO E: *Verifica*

- *Verifica formativa/sommativa*
- *Attività di recupero*
  - Attività in classe: lavoro individuale e di gruppo attraverso esercizi di richiamo finalizzato a colmare le lacune.
  - Attività a casa: ripasso dei concetti studiati ed esercizi relativi.

VERIFICA FORMATIVA/SOMMATIVA

La verifica sommativa sugli argomenti trattati è stata svolta tramite una prova scritta contenente una breve varietà di test (a risposta multipla e di tipo vero-falso), ed esercizi con diversi livelli di difficoltà al fine di valutare nel miglior modo le famose 3C (conoscenze, competenze, capacità). Il punteggio per ogni esercizio è stato esplicitamente scritto accanto ad ognuno di essi. In tal modo ogni studente ha potuto scegliere quali esercizi risolvere per raggiungere almeno la sufficienza.

1. Un'equazione di secondo grado ha soluzioni coincidenti se:
   - ☐ $\Delta > 0$ e $a > 0$
   - ☐ $\Delta < 0$ e $a < 0$
   - ☐ $\Delta = 0$
   - ☐ a = 0
   - ☐ c = 0

   (***Punti 1***)

2. Accanto a ognuna delle seguenti affermazioni scrivi se è vera o falsa.
   - L'equazione di secondo grado $3x^2 - 5x = 7$ è scritta in forma normale **V** **F**
   - Nell'equazione $2x^2 + 9x = 0$ il termine noto è uguale a zero. **V** **F**
   - Se un'equazione di secondo grado è incompleta, il coefficiente di x e il termine noto sono entrambi nulli. **V** **F**
   - $x = - 2$ è una soluzione dell'equazione $4x^2 + 5x - 6 = 0$. **V** **F**

   (***Punti 1***)

3. Risolvi le seguenti equazioni:
   - $x^2 + 8x - 9= 0$
   - $9 + 16x^2 + 24x = 0$
   - $- 6x^2 + 216= 0$

- $3x^2 + 1 = 0$
- $4x^2 - 8x = 0$
- $-2x^2 + x = 0$

(***Punti 3***)

4. Risolvi le seguenti equazioni:
   - $(2 - 3x)^2 - (2x + 1)^2 = 4(2 - 4x)$
   - $3(1 - 2x) - 2(x - 1)^2 = (3x + 1)^2$
   - $(x + 2)^2 - (x + 3)(x - 1) = x(x + 4)$

(***Punti 3***)

5. Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado:
   - $12x^2 + x - 6 = 0$
   - $x^2 + 5x + 4 = 0$

(***Punti 2***)

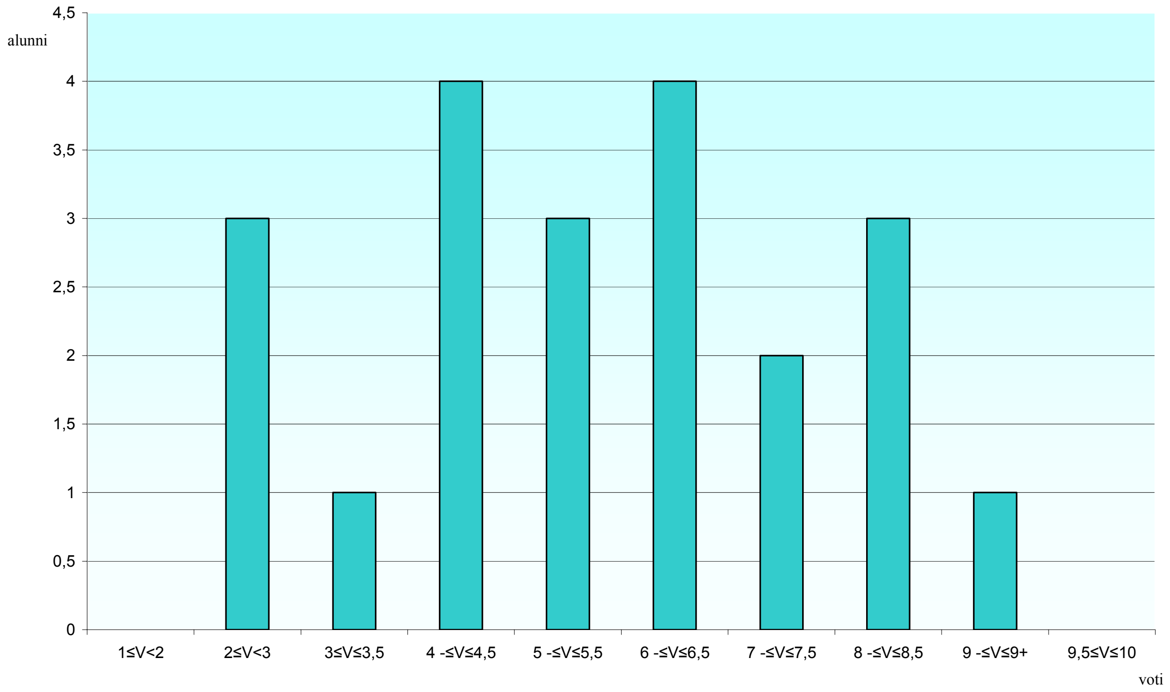
ATTIVITÀ DI RECUPERO

L'attività di recupero verrà svolta risolvendo in classe esercizi sugli argomenti trattati al fine di colmare le lacune e di potenziare le conoscenze già acquisite.

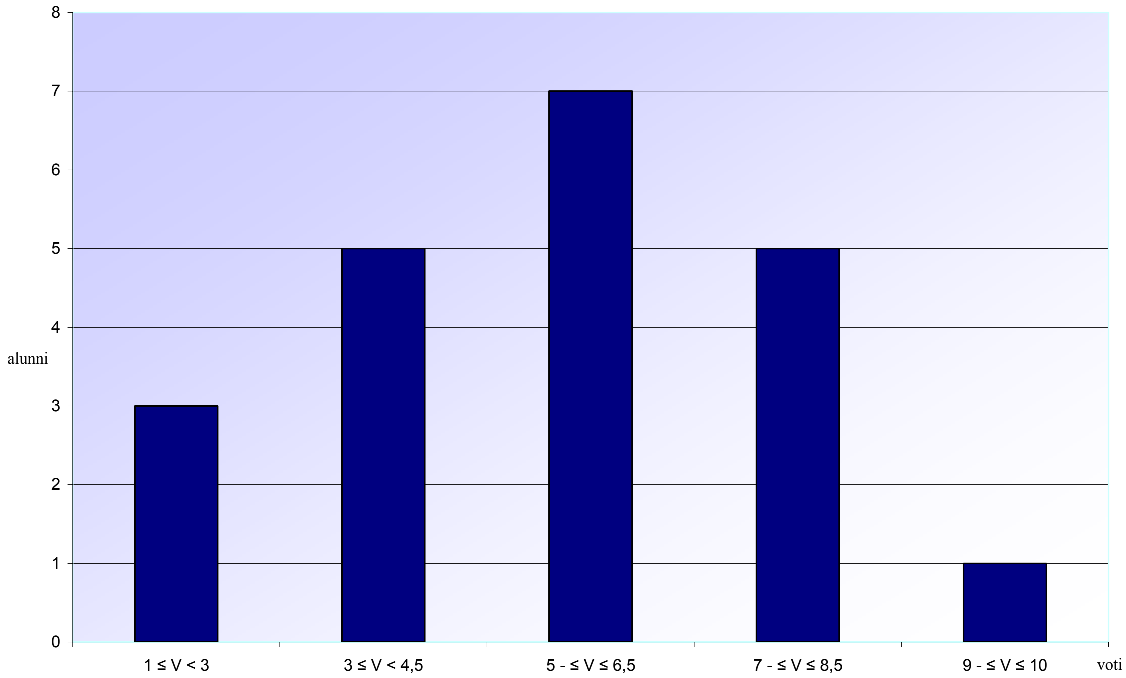
La stessa sarà completata individualmente dagli studenti attraverso la risoluzione di esercizi da fare a casa sulla tipologia di quelli svolti in classe e attraverso il ripasso degli argomenti trattati.

↳ RISULTATI DELLA PROVA DI VERIFICA

Ho riportato nel grafico seguente i risultati della prova di verifica sulle equazioni di secondo grado, in particolare sull'asse delle *x* sono riportati i risultati ottenuti mentre sull'asse delle *y* il numero di studenti che ha ottenuto tali votazioni:



Ho poi riportato gli stessi risultati su un grafico a cinque classi, per meglio evidenziare la distribuzione dei risultati:



Dall'analisi dei risultati rappresentati nel diagramma a cinque classi si denota quanto la classe sia variegata. Infatti, le votazioni si sono distribuite secondo la curva di Gauss, mettendo in risalto un'armonica distribuzione dei risultati intorno a una media sufficienza.

Bibliografia

Bergamini – Trifone - Zagnoli, *Manuale di Algebra*, ed. Zanichelli

N. Dodero – P. Barboncini – R. Manfredi, *Lineamenti di Geometria Analitica e complementi di Algebra*, ed. Ghisetti e Corvi Editori

P. M. Gianoglio – P. Arri – G. Ravizza; *Matematica Attiva: Algebra 2*, ed. Il Capitello

Appunti e dispense fornite dai Supervisori

Appunti e dispense del corso di Laboratorio di didattica della Matematica, prof. Rizzo

Appunti e dispense del corso di Didattica della Matematica II, prof. Rizzo

Appunti e dispense del corso di Didattica della Matematica I, prof. Pascali

Dispense del corso di Docimologia, prof. Ancona

Appunti del corso di Didattica generale, prof. Greco

Appunti del corso di Pedagogia generale, prof. Petrelli

Sitografia:

http://www. matematicamente.it

http://www. zanichelli.it