

ANALISI FRATTALE E VALUTAZIONI FINANZIARIE

Rosanna Iembo (*)

Massimo Squillante (**)

Aldo Ventre (***)

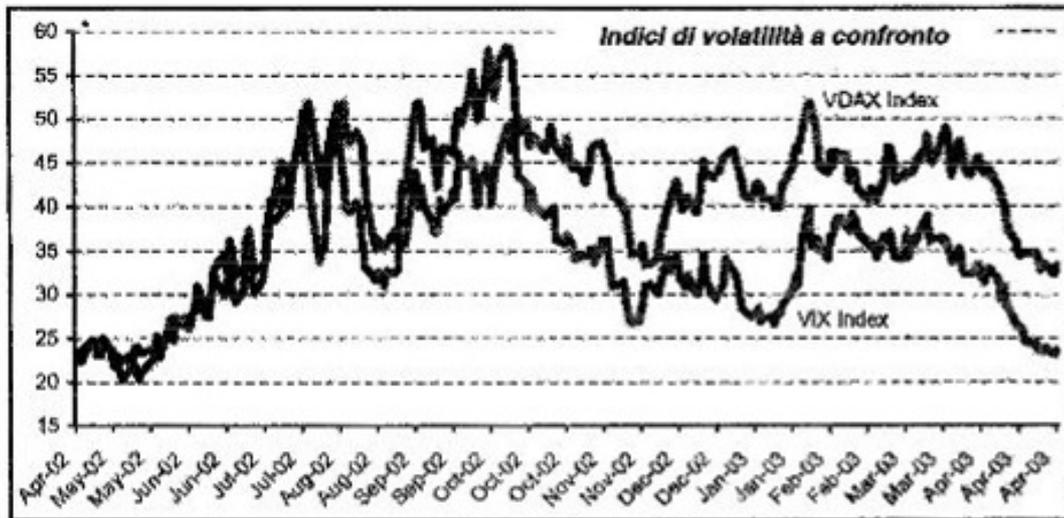
1. Sommario

In questo lavoro proponiamo un approccio frattale allo studio degli indici di borsa.

Esaminando alcuni grafici provenienti da fonti ufficiali (MF e Milano Finanza 2003), si evidenzia, a scale arbitrariamente piccole, che essi hanno, sia localmente che globalmente, una struttura decisamente irregolare per essere descritta nel linguaggio geometrico tradizionale; si calcolano, quindi, le dimensioni frattali dei grafici di tali oggetti e si indicano le caratteristiche di auto-affinità.

2. Volatilità

A. Kassam e T. Sharma [8], hanno recentemente analizzato e messo a confronto diversi indici di volatilità, quali il VDAX e il VIX, evidenziando, tra l'altro, l'entità dei cedimenti sul versamento indici per la volatilità implicita europea, spinta al ribasso dal graduale rialzo dei listini internazionali, la riduzione del gap tra volatilità implicita e realizzata, più rapida del calo della stessa volatilità implicita e il fatto che, recentemente, in tutti i mercati europei, volatilità implicita e strutture a termine si collocano nel quintile inferiore; di qui, cambiamenti repentini.



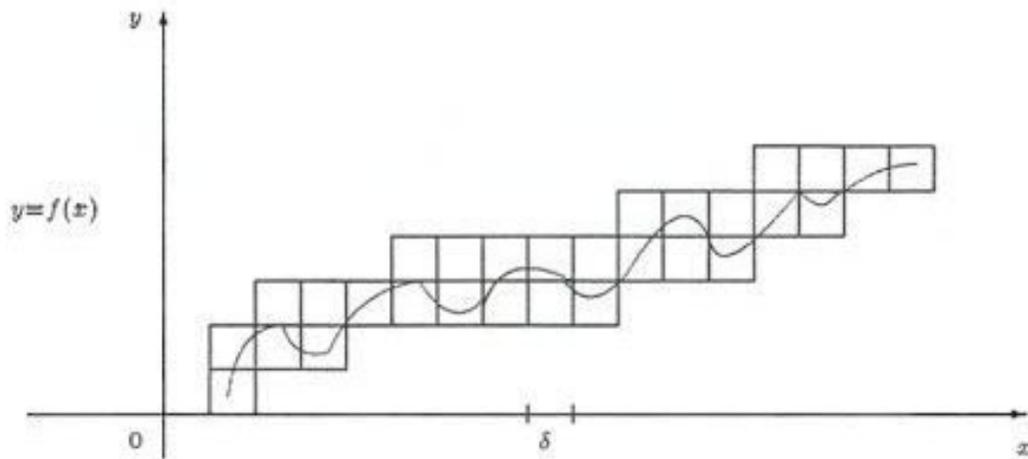
D'altro canto, come osservato da Mandelbrot [12], le fortune finanziarie si formano o si perdono con estrema rapidità quando il mercato diventa selvaggio e la variabilità aumenta vigorosamente.

I modelli finanziari maggiormente adoperati nel ventesimo secolo tendono a sottostimare o, addirittura ad escludere, la possibilità di cambiamenti drastici; i grandi cambiamenti nel mercato vengono ritenuti altamente improbabili; si presume che le variazioni di prezzo siano distribuite normalmente, considerando gli eventi che cadono nelle estremità della curva a campana decisamente rari. In tal modo si può spiegare approssimativamente il 95% di ciò che accade nel mercato, lasciando praticamente scoperto un 5% di situazioni; per utilizzare un paragone già proposto, se si cerca di interpretare allo stesso modo i fenomeni climatici, i tifoni, eventi certamente poco probabili, sarebbero da considerare inesistenti.

La difficoltà nell'interpretare e predire le diverse situazioni, anche patologiche, dell'andamento dei mercati finanziari, suggerisce di individuare altri strumenti per la loro modellazione; l'analisi frattale può dare un contributo in tal senso, senza, ovviamente, avere la pretesa di fornire una previsione certa degli andamenti di borsa, ma con l'obiettivo di inquadrare il rischio di mercato in un quadro realistico.

2. Dimensione frattale

Proviamo pertanto a calcolare la dimensione frattale dei grafici di alcuni indici di borsa, quali ad esempio, il mibtel e il fib 30. A tale scopo, riprendendo le tecniche usate in altre situazioni, ad esempio per descrivere alcuni fenomeni idrogeologici [4], utilizziamo il metodo del box-counting, ossia riferiamo il grafico di tali indici ad una rete a δ -maglia quadrata di cui è fissata l'origine come in figura



consideriamo quindi una successione di reti dove δ è scalato di un fattore di 2 ogni volta che si passa da una rete alla successiva.

Indicando con $n(2^k)$, $k=0,1,2,\dots$ Il numero di quadrati contati in una rete, sappiamo che la dimensione box-counting del frattale è data da:

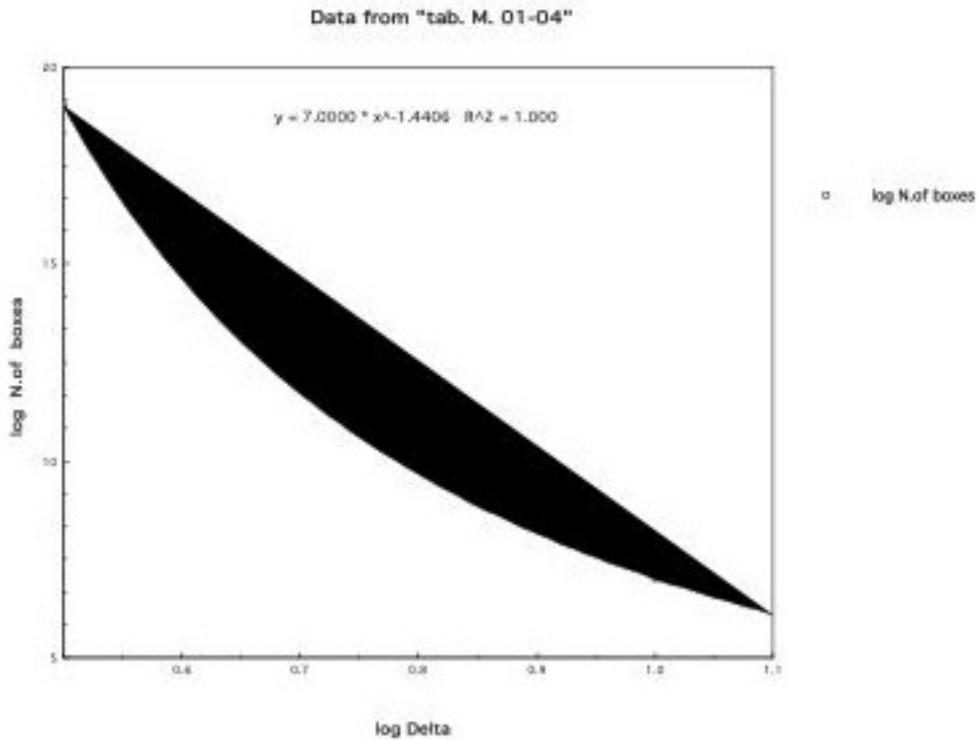
$$\frac{\log n(2^{-k-1}) - \log n(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} = \log \frac{n(2^{-k-1})}{n(2^{-k})}$$

Nella tabella successiva è elencato il numero n di quadrati della rete a δ -maglia che intersecano i grafici degli indici di borsa in esame; per δ sono considerati i valori cm 1 e cm 0,5.

MIBTEL 1 Aprile 2003

Nel diagramma log-log successivo è rappresentata la dimensione frattale del grafico dell' indice di borsa in esame.

δ	n
cm 1	7
cm 0.5	19



La dimensione frattale è $d=1,4406$ e coincide con la pendenza della retta nel diagramma $\log \delta - \log(N.of boxes)$.

Riportiamo, di seguito, i dati e la dimensione frattale del grafico del mibtel per il mese di aprile 2003

MIBTEL

1^o Aprile -1^o Maggio 2003	d
1 Aprile	1.4406
2 Aprile	1.1699
3 Aprile	1.4854
4 Aprile	1.0995
5 Aprile	0.88452
8 Aprile	1.0780
9 Aprile	1.2224
10 Aprile	1.1520
11 Aprile	1.1699
12 Aprile	1.1255
15 Aprile	1.3626
16 Aprile	1.5025
17 Aprile	1.1155
18 Aprile	0.89308

19 Aprile	1.0589
22 Aprile	1.2224
23 Aprile	1.0875
24 Aprile	0.91754
25 Aprile	1.0875
26 Aprile	0.93289
29 Aprile	1.3219
30 Aprile	1.2479
1 Maggio	1.3626

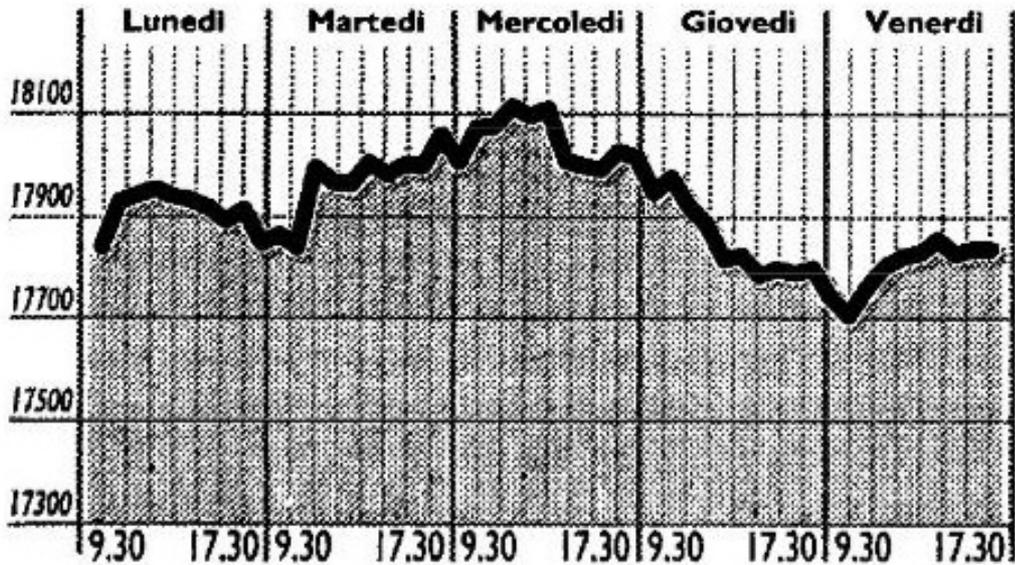
Nella tabella successiva riportiamo i dati relativi al calcolo della dimensione frattale (d) del grafico del fib 30 dal 1^o Aprile al 1^o Maggio 2003 del grafico dell'indice di borsa in esame.

FIB 30

1^o Aprile-1^o Maggio 2003	d
1 Aprile	1.2479
2 Aprile	1.2479
3 Aprile	1.1375
4 Aprile	0.87447
8 Aprile	0.73697
9 Aprile	1.0875
10 Aprile	1.2016
11 Aprile	1.3923
15 Aprile	0.80735
16 Aprile	1.1926
17 Aprile	1.2224
18 Aprile	1.0995
22 Aprile	0.77761
23 Aprile	1.1926
24 Aprile	1.4150
25 Aprile	1.1699
29 Aprile	0.77761
30 Aprile	0.91754
1 Maggio	1.1699

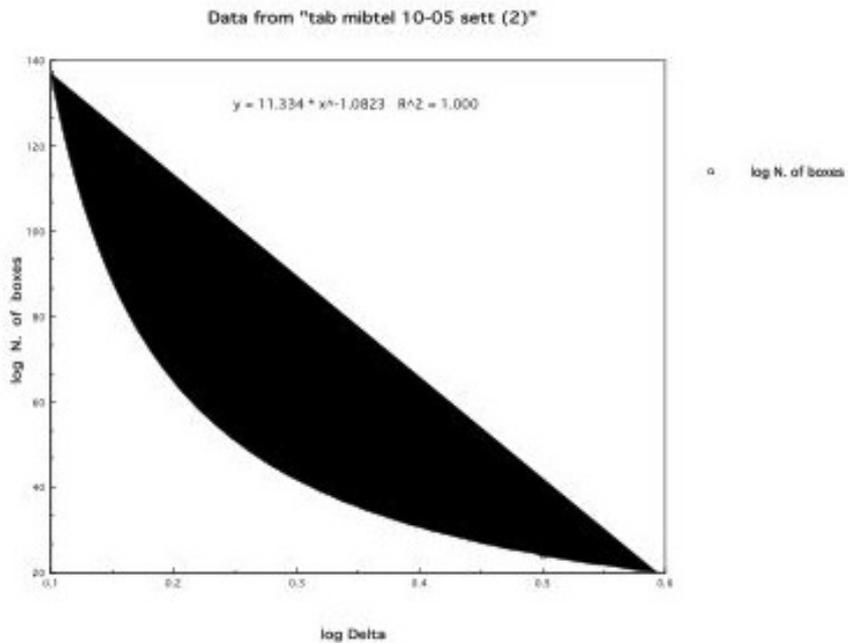
4. Autoaffinità

Esaminiamo ora il grafico che rappresenta l'andamento del mibtel per la settimana 3-10 Maggio 2003.



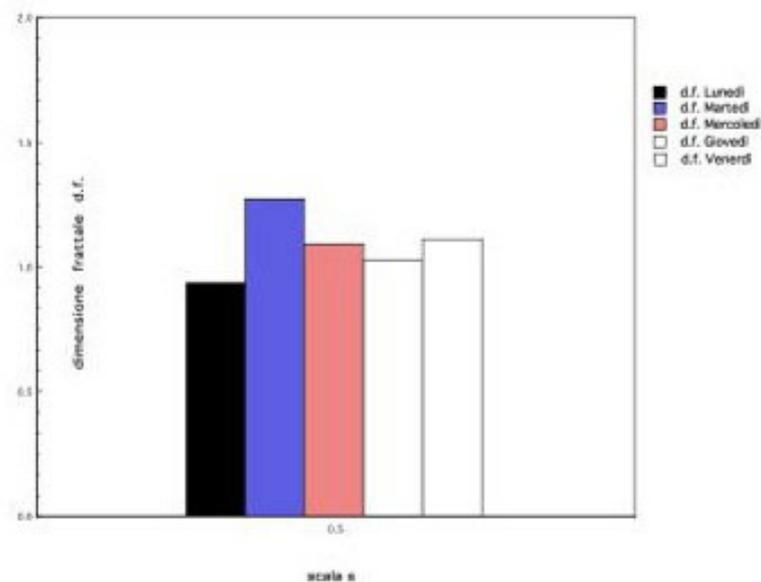
e valutiamo la dimensione frattale a scale piuttosto dettagliate.

Per δ che varia tra cm 0.5 e cm 0.1, la stima ottenuta per la dimensione frattale del grafico è $d = 1.0823$;



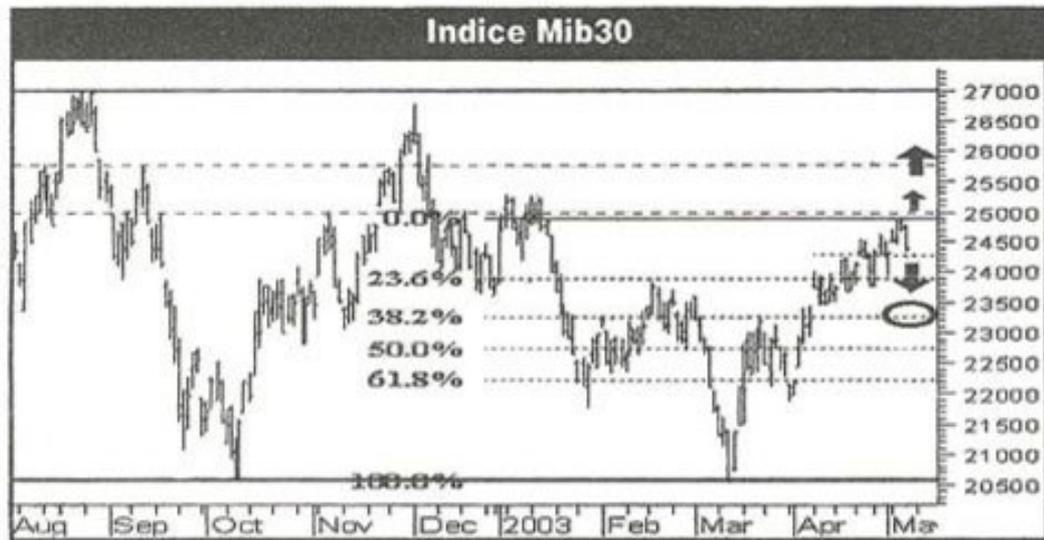
mentre, esaminando le restrizioni ad opportuni sottointervalli, per δ che varia tra cm 0.5 e cm 0.1, la corrispondente valutazione della dimensione frattale è riportata nella seguente tabella:

- lunedì $d = 0.93454$
- martedì $d = 1.2732$
- mercoledì $d = 1.0922$
- giovedì $d = 1.0244$
- venerdì $d = 1.1133$



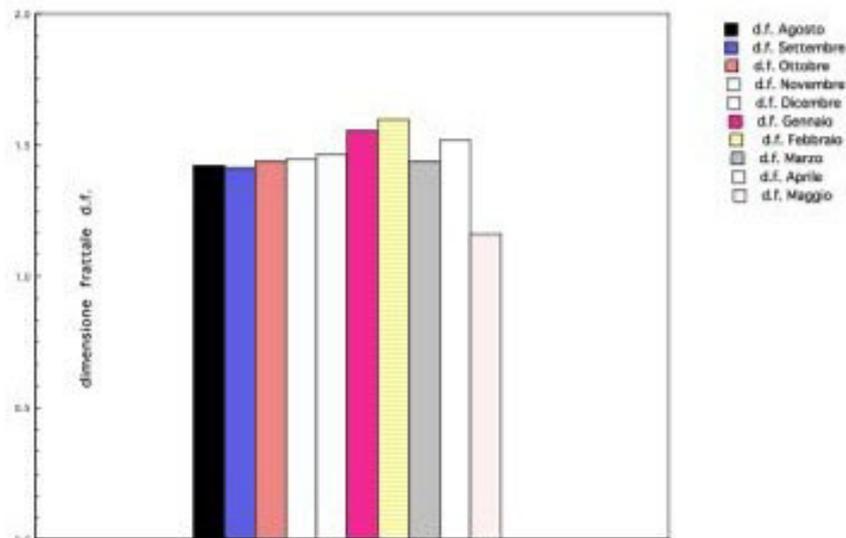
Analogamente, analizzando il grafico che rappresenta l'indice mib 30 da Agosto 2002 a Maggio 2003¹

¹ da Focus di "Milano Finanza" del 10 Maggio 2003



per δ che varia tra cm 0.5 e cm 0.1, troviamo che la dimensione frattale del grafico è $d = 1.4256$; mentre esaminando anche in questo caso il grafico per sottointervalli otteniamo i seguenti valori per la dimensione:

- Agosto $d = 1.4217$
- Settembre $d = 1.4149$
- Ottobre $d = 1.4375$
- Novembre $d = 1.4460$
- Dicembre $d = 1.4610$
- Gennaio $d = 1.5525$
- Febbraio $d = 1.5937$
- Marzo $d = 1.4384$
- Aprile $d = 1.5175$
- Maggio $d = 1.1630$



Dai valori ottenuti si evince che, esaminando a scale dettagliate uno qualsiasi di questi oggetti frattali, non si individua, in maniera simile a quanto messo in evidenza per fenomeni idrogeologici [4], un valore univoco della dimensione frattale; è quindi lecito pensare ciascuna di queste strutture come un insieme di differenti frattali, ciascuno con un differente valore di dimensione box-counting; si ha, insomma, uno spettro di numeri che fornisce informazioni sulla distribuzione delle dimensioni frattali nella struttura: siamo quindi, anche in questo caso, in presenza di oggetti multifrattali.

Osservando ulteriori fenomeni in ambito finanziario (nel settore borsistico, monetario, azionario o obbligazionario), come nel grafico sottostante in cui è riportato l'andamento dell'euro nel 2002 rispetto al dollaro



si vede che non è possibile parlare di autosimilarità in senso stretto, proprio per il processo di generazione decisamente random dei grafici di tali oggetti: vi è difatti una differente scalarizzazione in “direzione orizzontale”, la direzione tempo e in “direzione verticale”, il cambio.

E' possibile però osservare l'invarianza di scala di tali grafici.

Se scaliamo la direzione orizzontale del fattore 2^0 e la direzione verticale del fattore 2^{-1}

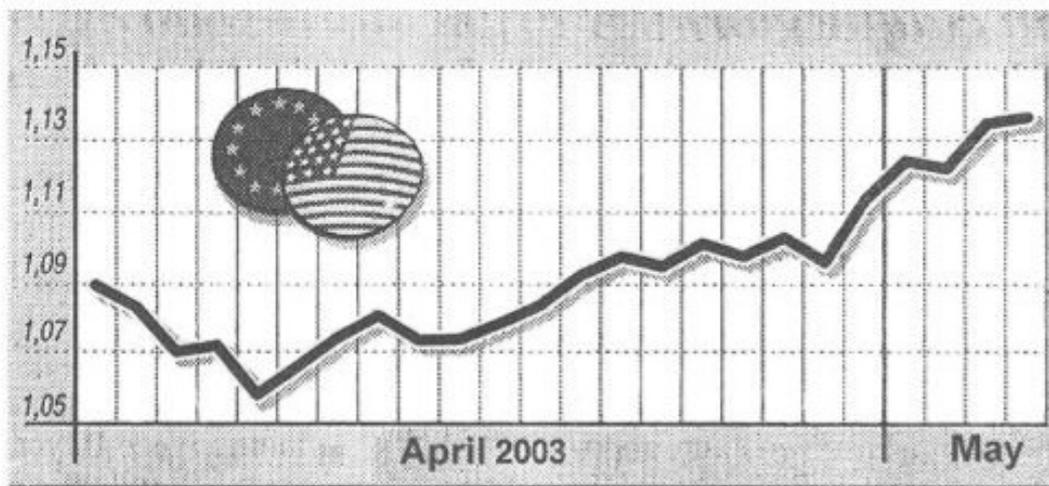


osserviamo che vi sono “regioni” che hanno la stessa forma propriamente riscalata





Ugualmente scalando la direzione verticale del fattore 6^{-1} e la direzione orizzontale del fattore 20^{-1}



otteniamo curve con le stesse proprietà; un'analisi dei momenti delle corrispondenti variabili metterebbe in luce l'uguaglianza dei valori per le curve sottoposte a trasformazione di scala e la proprietà di autoaffinità.

Osservazioni finali

Mandelbrot [8] paragona molto espressivamente un frattale ad un cavolfiore: una forma geometrica che può essere separata in tante parti, ognuna delle quali è una versione ridotta dell'intero.

Tali proprietà possono essere messe in luce in alcuni fenomeni finanziari (e naturalmente anche in altri fenomeni quali l'assetto idrologico dei bacini dei fiumi [4]): i grafici relativi a movimenti di titoli o di danaro presentano regioni simili dopo essere stati ampliati o ridotti su lassi di tempo di diversa gran-

dezza; nel nostro lavoro abbiamo esaminato, da questo punto di vista, il mibtel e il fib 30 per vari mesi, il mib 30 da Agosto 2002 a Maggio 2003, l'andamento dell'euro rispetto al dollaro nel corso di un anno.

Queste qualità e la valutazione delle dimensioni permettono di definire tali grafici come curve frattali, o meglio multifrattali, precisando che per la somiglianza tra le parti e l'intero occorre parlare di autoaffinità e non di autosimilarità poiché, in questo caso, l'ingrandimento o la riduzione avvengono secondo diversi fattori di scala.

L'analisi dovrebbe continuare per individuare i diversi processi generativi degli oggetti multifrattali individuati e per permettere un confronto analitico diretto tra di essi, che possa essere utilizzato anche nella rappresentazione delle preferenze del decisore in ambito finanziario e nei corrispondenti processi decisionali [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Livia D'Apuzzo and Massimo Squillante, Representation of Preferences by Quasi-Linear Means. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 35(1-4): 177-195, 2002.
- [2] Jens Feder, *Fractals*, Plenum Press, 1988.
- [3] Robert C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics*, Oxford University Press, 1994.
- [4] Rosanna Iembo, Dimensione Frattale e Problemi di Scala, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N.1: 65-76, 1997.
- [5] Rosanna Iembo, Un'Interpretazione Frattale di Legge Esponenziale, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N.1: 129-136, 1997.
- [6] Rosanna Iembo, Relazione Perimetro-Area : raffronto tra frattale sottile-frattale grosso e relative implicazioni, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N.3: 9-15, 1998.
- [7] Edi Karni and David Schmeidler, Utility Theory with Uncertainty, in K.J. Arrow, Intriligator (eds) *Handbook of mathematical economics*.
- [8] Atlaf Kassam e Tarum Sharma, *Derivatives and trading research*, MF, 1-5-2003.
- [9] Benoit Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1977.
- [10] Benoit Mandelbrot, *Fractales, hasard et finance*, Flammarion, 1997.
- [11] Benoit Mandelbrot, *Fractals and scaling in finance*, Springer, 1997.
- [12] Benoit Mandelbrot, *Nel mondo dei frattali*, Di Renzo Editore, 2001.
- [13] Edgar Peters, *Fractal market analysis*, Wiley, 1994.

(*) Dipartimento di Matematica, Facoltà di Ingegneria, Università della Calabria; e-mail:
r.iembo@unical.it

(**) Dipartimento di Analisi dei sistemi economici e sociali, Università del Sannio; e-mail:
squillan@unisannio.it

(***) Dipartimento di restauro e costruzione dell'architettura e dell'ambiente Seconda Università di Napoli, e-mail: aldo.ventre@unina2.it