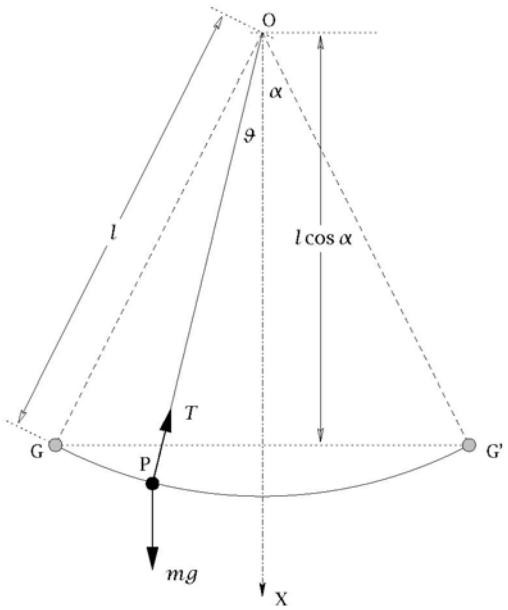
Leonardo Latella

IL PENDOLO DI KATER

RICHIAMI TEORICI SUL PENDOLO SEMPLICE



Un pendolo semplice è costituito da un filo inestensibile di lunghezza ℓ e massa trascurabile a cui è appeso un punto materiale di massa m. Esso può oscillare attorno a un punto fisso O detto polo. In ogni istante le forze agenti sulla massa sono il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e la tensione del filo $\vec{T}$. Se il filo forma un angolo ϑ con la verticale, la componente della forza peso lungo il filo controbilancia la tensione del filo stesso, mentre la componente della forza peso perpendicolare al filo funge da forza di richiamo e produce il moto oscillatorio del pendolo. Il momento risultante di tale forza rispetto al polo O è

$$\vec{M} = \vec{\ell} \times m\vec{g} \quad \text{in modulo} \quad M = -mg\ell \sin\vartheta$$

Dove il "-" sta ad indicare che si tratta di un momento di richiamo.

Dato che $M = I\dot{\omega} = m\ell^2\ddot{\vartheta}$ eguagliando le due espressioni si ottiene

$$m\ell^2\ddot{\vartheta} = -mg\ell \sin\vartheta$$

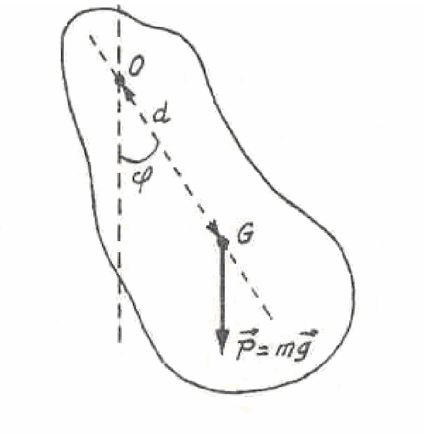
da cui considerando che $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ e approssimando $\sin\vartheta \simeq \vartheta$ (per piccole oscillazioni) si ottiene (*) $\ddot{\vartheta} + \omega^2\vartheta = 0$

avente come soluzione generale $\vartheta(t) = \vartheta_M \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \vartheta'\right)$.

Il periodo delle oscillazioni è pari a $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Dalla relazione inversa è possibile

calcolare l'accelerazione di gravità $$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$$

RICHIAMI TEORICI SUL PENDOLO COMPOSTO



A differenza del pendolo semplice il pendolo composto è costituito da un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse fisso non passante per il centro di massa. Considerando le forze agenti e trascurando ogni forma di attrito, si ottengono, come nel caso precedente, le equazioni

$$M = I\ddot{\varphi}$$

dove φ rappresenta l'angolo compreso tra l'asse di rotazione e la retta congiungente il polo con il centro di massa del corpo, e

$$M = -mgd\sin\varphi$$

dove d indica la distanza tra il polo O e il centro di massa (G).

Eguagliando le due espressioni e considerando piccole oscillazioni ($\sin\varphi \simeq \varphi$) si ottiene

$$I\ddot{\varphi} = -mgd\varphi \qquad \text{da cui} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0$$

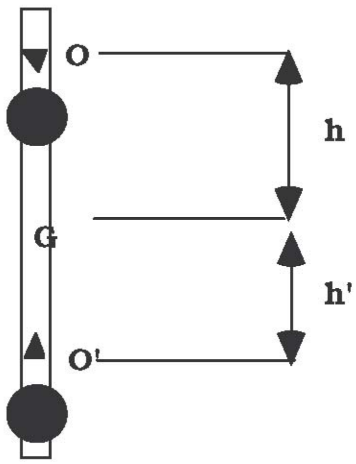
per analogia con la (*) sarà $$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

quindi il periodo delle oscillazioni è dato da (*) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mdg}}$.

Confrontando le espressioni del periodo del pendolo semplice e del pendolo composto, si vede che il periodo del pendolo composto è quello che avrebbe un pendolo semplice di lunghezza $\ell = \frac{I}{md}$. Questa lunghezza viene detta “lunghezza ridotta” del pendolo composto.

PENDOLO DI KATER

Calcolare il valore di **g** utilizzando la (*) può risultare complesso in quanto non è sempre facile determinare il valore di I . Per questo motivo il geodeta inglese Henry Kater vissuto tra il 1777 ed il 1835, sfruttando il teorema degli assi paralleli di Huygens-Steiner, costruì un nuovo tipo di pendolo che gli permise di eguagliare ad I un'espressione di dati facilmente quantificabili. Il pendolo che ideò è noto come pendolo reversibile o di Kater che è un particolare tipo di pendolo composto. Esso è costituito da un asta al fondo della quale è appesa una massa fissa mentre una massa mobile può essere spostata lungo l’asta. Il corpo nel suo insieme è in grado di oscillare intorno a due diversi assi individuati dai poli O e O’ distanti tra di loro ℓ. Lo spostamento della massa mobile comporta una variazione del momento di inerzia (che è calcolato rispetto all’asse di rotazione) del corpo e una conseguente variazione del periodo di oscillazione.



Kater dimostrò che trovando la posizione della massa libera per la quale il periodo di oscillazione attorno ad un asse fosse stato uguale a quello ottenuto girando il pendolo e facendolo oscillare attorno all'altro asse, si riesce ad ottenere una stima della pulsazione ω indipendente da I. Infatti ottenuta la condizione di uguaglianza tra i periodi si può dedurre che la pulsazione del moto del pendolo sia uguale e indipendentemente da quale asse costituisca il punto di oscillazione.

Indichiamo con h e h' le distanze degli assi di rotazione dal centro di massa (G) del pendolo tali che $h + h' = \ell$.

La condizione di uguaglianza tra i periodi di oscillazione della massa fissa attorno al proprio asse (O') e della massa mobile anch'essa attorno al proprio asse (O) si scriverà

$$T_O = T_{O'} = T$$

dove $\qquad T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}} \qquad$ e $\qquad T_{O'} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{O'}}{mgh'}}$

quale sarebbe la lunghezza del pendolo semplice che ha il valore di periodo pari a T ?

$$T_O = T_{O'} = T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{rid}}{g}}$$

da questa otteniamo $\qquad \frac{I_O}{mgh} = \frac{I_{O'}}{mgh'} = \frac{\ell_{rid}}{g}$

da cui $\qquad I_O = mh\ell_{rid} \quad$ e $\quad I_{O'} = mh'\ell_{rid}$

utilizzando il teorema di Huygens-Steiner possiamo esprimere I_O e $I_{O'}$ in funzione del momento di inerzia rispetto al centro di massa del corpo I_{CM}

$$I_O = I_{CM} + mh^2 \qquad \text{e} \qquad I_{O'} = I_{CM} + mh'^2$$

quindi $\qquad I_{CM} + mh^2 = mh\ell_{rid} \qquad$ e $\qquad I_{CM} + mh'^2 = mh'\ell_{rid}$

sottraendo membro a membro $\qquad m\left(h^2 - h'^2\right) = \ell_{rid} m\left(h - h'\right)$

da cui $\qquad \ell_{rid} = h + h'$

Quindi il periodo, ottenuto spostando la massa mobile fino a che non sia realizzata la condizione $T_O = T_{O'}$, coincide con quello di un pendolo semplice che abbia lunghezza pari alla lunghezza ridotta del pendolo composto.

L'accelerazione di gravità **g** risulta quindi espressa come

$$g = \frac{4\pi^2\ell_{rid}}{T^2} \qquad \text{con} \qquad T = T_O = T_{O'}$$