140. Calcolo di traiettorie lunari mediante metodi analitici approssimati

Marco Giancola
giancolamarco@libero.it

Studiare il moto di un veicolo spaziale diretto verso la Luna equivale a risolvere il problema ristretto dei tre corpi (Terra, Luna, veicolo), il quale non ammette soluzione analitica. Pertanto, una traiettoria lunare può essere calcolata con sufficiente precisione solamente mediante integrazione numerica delle equazioni del moto.
La procedura usuale consiste nello scegliere le condizioni iniziali, ossia la posizione iniziale del veicolo, detta anche *punto di iniezione*, e la sua velocità iniziale (rispetto al centro della Terra), rappresentate rispettivamente dai vettori $\vec{r}_0$ e $\vec{V}_0$, e nel determinare poi, mediante un integratore numerico che utilizza l'algoritmo di Runge-Kutta o un altro simile, la traiettoria del veicolo. Se la traiettoria così ottenuta non è soddisfacente, si ricomincia daccapo scegliendo un altro valore di $\vec{r}_0$ e/o $\vec{V}_0$, finché non si ottiene una traiettoria adatta ad un trasferimento lunare. È evidente che una simile procedura può richiedere molto tempo. Per questo motivo, prima di integrare numericamente le equazioni del moto, si effettua un'analisi preliminare della missione lunare tramite metodi analitici approssimati, i quali consentono di limitare la scelta delle condizioni iniziali e aiutano a comprendere la dinamica del problema.
Un metodo analitico approssimato, comunemente usato per il calcolo di traiettorie interplanetarie, è il *metodo delle coniche raccordate*. Esso consiste nel suddividere il problema degli *n* corpi, problema che approssima quello del moto di un qualsiasi oggetto nello spazio, in una sequenza di problemi di due corpi. In altre parole, quando il veicolo spaziale entra in quella che si chiama *sfera di influenza* di un pianeta, ossia quella regione sferica dello spazio nella quale l'attrazione gravitazionale del pianeta è predominante rispetto a quella degli altri corpi celesti, si suppone che il suo comportamento possa essere approssimato da un semplice moto a due corpi, come se su di esso agisse esclusivamente la forza gravitazionale del pianeta. Sotto questa ipotesi, si può scrivere una soluzione analitica utilizzando semplici formule kepleriane, ottenendo una sequenza di archi di coniche kepleriane raccordati in quei punti che definiscono il limite della sfera di influenza dei corpi celesti incontrati.
Un altro metodo analitico approssimato, simile a quello delle coniche raccordate, è il *metodo di Öpik*, che si basa essenzialmente su tre assunzioni:

a) il comportamento del veicolo, durante l'incontro con un pianeta, segue un modello a due corpi;
b) nel punto di massimo avvicinamento, la velocità del veicolo è uguale alla velocità di collisione;
c) fuori dalla sfera di influenza del pianeta, il veicolo percorre una traiettoria kepleriana imperturbata.

Adotteremo la definizione di sfera di influenza di un corpo celeste di massa *m* rispetto ad un altro di massa *M* data da Laplace. Essa è una sfera concentrica con m, il cui raggio è

$$R_S = d\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{5}}$$

dove *d* è la distanza che separa *m* da *M*. Grazie a questa formula, si può calcolare il raggio della sfera di influenza della Luna rispetto alla Terra, che è uguale a 66300 km, ovvero circa 1/6 della distanza della Luna dalla Terra.
Vediamo ora come si calcola una traiettoria lunare utilizzando il metodo delle coniche raccordate. Supporremo che tale traiettoria sia complanare con l'orbita della Luna.
Cominciamo col determinare il segmento di traiettoria che va dal punto di iniezione alla frontiera della sfera di influenza della Luna. Tale segmento è un arco di conica kepleriana con un fuoco nel centro

della Terra, poiché, in questa prima fase, consideriamo solo l'attrazione gravitazionale terrestre. I quattro parametri che caratterizzano l'orbita geocentrica con cui il veicolo si allontana dalla Terra sono:

$$r_0, V_0, \phi_0, \gamma_0$$

dove γ_0 è l'angolo che $\vec{r}_0$ forma con la retta passante per il centro della Terra e quello della Luna, mentre ϕ_0 è l'angolo che $\vec{V}_0$ forma con la retta passante per il punto di iniezione e perpendicolare a $\vec{r}_0$. Vengono scelti arbitrariamente i valori di r_0, V_0, ϕ_0 (ossia tre delle 4 condizioni iniziali) e l'angolo λ_1 che specifica il punto nel quale la traiettoria geocentrica interseca la frontiera della sfera di influenza lunare. Dati questi 4 valori, siamo in grado di determinare le condizioni r_1, V_1, ϕ_1 e γ_1 dell'arrivo alla sfera di influenza della Luna. Ipotizziamo che il veicolo penetri nella sfera prima di giungere all'apogeo. L'energia totale ed il momento angolare dell'orbita geocentrica sono dati rispettivamente da

$$E = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_0} \qquad h = r_0 V_0 \cos\phi_0$$

essendo μ_T la costante gravitazionale terrestre, ovvero il prodotto della costante di gravitazione universale per la massa della Terra. Grazie al teorema del coseno, possiamo calcolare la norma del vettore corrispondente al punto di intersezione della traiettoria con la frontiera della sfera di influenza lunare:

$$r_1 = \sqrt{d_{TL}^2 + R_S^2 - 2 d_{TL} R_S \cos\lambda_1}$$

dove d_{TL} è la distanza Terra-Luna. Dalla conservazione dell'energia totale e del momento angolare ricaviamo la velocità con cui il veicolo entra nella sfera di influenza della Luna:

$$V_1 = \sqrt{2(E + \mu_T / r_1)}$$

e l'angolo che $\vec{V}_1$ forma con le rette perpendicolari a $\vec{r}_1$:

$$\cos\phi_1 = \frac{h}{r_1 V_1} \Rightarrow \phi_1 = \arccos\left(\frac{h}{r_1 V_1}\right)$$

ϕ_1 è compreso tra 0° e 90°, dal momento che abbiamo imposto alla navicella spaziale di arrivare alla frontiera della sfera di influenza lunare prima di pervenire all'apogeo. γ_1 è l'angolo che $\vec{r}_1$ forma con la retta passante per i centri della Terra e della Luna, mentre λ_1 è l'angolo che tale retta forma con quella passante per il centro del globo lunare ed il punto individuato da $\vec{r}_1$. Pertanto, questi due angoli sono legati dalla relazione

$$sen\gamma_1 = \frac{R_S}{r_1} sen\lambda_1$$

Il tempo

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

che occorre per realizzare questo trasferimento dal punto di iniezione alla sfera di influenza lunare può essere calcolato una volta noti i valori v_0 e v_1 dell'anomalia vera. Per calcolare tali valori, occorre prima determinare il parametro p, l'eccentricità e e la lunghezza a del semiasse maggiore della traiettoria geocentrica, tramite le formule

$$p = \frac{h^2}{\mu_T} \qquad a = \frac{-\mu_T}{2E} \qquad e = \sqrt{1 - p/a}$$

Dopodiché, dall'equazione polare di una conica

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos v}{p}$$

otteniamo:

$$\cos v_0 = \frac{p - r_0}{r_0 e} \qquad \cos v_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e}$$

Ora possiamo calcolare le anomalie eccentriche E_0 ed E_1:

$$E_0 = \arccos\left(\frac{e + \cos v_0}{1 + e\cos v_0}\right) \qquad E_1 = \arccos\left(\frac{e + \cos v_1}{1 + e\cos v_1}\right)$$

Siamo finalmente in grado di determinare il tempo di volo:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T}}\left[(E_1 - esenE_1) - (E_0 - esenE_0)\right]$$

Durante il periodo di tempo Δt, la Luna si muove, con velocità angolare $\omega = 2{,}66 \cdot 10^{-6}$ rad/s, andando dalla posizione che aveva all'istante t_0, in cui avviene l'iniezione, alla posizione che consente al veicolo di penetrare nella sua sfera di influenza all'istante t_1. Conoscendo l'angolo ωΔt descritto dal movimento della Luna durante il tempo di volo Δt, siamo in grado di calcolare l'angolo γ_0:

$$\gamma_0 = v_1 - v_0 - \gamma_1 - \omega\Delta t$$

Prima di calcolare Δt e γ_0, conviene verificare che i valori r_0, v_0, ϕ_0 e λ_1, che abbiamo scelto arbitrariamente, determinino una traiettoria soddisfacente. Se la traiettoria non fosse soddisfacente (ad esempio, non consentisse al veicolo di entrare nella sfera di influenza lunare), bisognerà riprovare a calcolarla modificando opportunamente i suddetti valori.
A questo punto, ci rimane da determinare la traiettoria interna alla sfera di influenza della Luna, dove si suppone che solamente la gravità lunare agisca sulla navicella spaziale. Poiché ora dobbiamo considerare la Luna come corpo centrale, è necessario trovare la velocità e la direzione del veicolo relative al centro della Luna. Indicheremo con il pedice due le condizioni iniziali relative al centro della Luna. Quindi, si avrà:

$$r_2 = R_S$$

La velocità del veicolo spaziale relativa al centro della Luna è

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_L$$

dove $\vec{V}_L$ è la velocità della Luna relativa al centro della Terra ed è pari, in modulo, a 1,02 km/s. Poiché l'angolo formato da $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_L$ è $\phi_1 - \gamma_1$, dalla formula precedente e dal teorema del coseno otteniamo:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + V_L^2 - 2V_1V_L\cos(\phi_1 - \gamma_1)}$$

Chiamiamo ε_2 l'angolo formato da $\vec{V}_2$ e da $-\vec{r}_2$, il quale soddisfa la relazione

$$V_2 sen\varepsilon_2 = V_L\cos\lambda_1 - V_1\cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \Rightarrow \varepsilon_2 = arcsen\left[\frac{V_L}{V_2}\cos\lambda_1 - \frac{V_1}{V_2}\cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1)\right]$$

E' ovvio che, se $\varepsilon_2 = 0$, il veicolo si schianterebbe sulla superficie lunare. L'energia totale ed il momento angolare dell'orbita selenocentrica sono dati dalle seguenti formule:

$$E = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_2} \qquad h = r_2 V_2 sen\varepsilon_2$$

dove μ_L è la costante gravitazionale lunare, ossia il prodotto della costante di gravitazione universale per la massa della Luna. Mentre il parametro e l'eccentricità si possono calcolare mediante le formule

$$p = \frac{h^2}{\mu_L} \qquad e = \sqrt{1 + 2Eh^2/\mu_L^2}$$

Siamo ora in grado di determinare le condizioni al periselenio:

$$r_p = \frac{p}{1+e} \qquad V_p = \sqrt{2\left(E + \mu_L / r_p\right)}$$

Qualora tali condizioni non fossero soddisfacenti, occorrerebbe modificare opportunamente o le condizioni di iniezione r_0, V_0, ϕ_0 o l'angolo λ_1. Si può dimostrare, verificando che E > 0, che la traiettoria kepleriana selenocentrica interna alla sfera di influenza lunare è iperbolica.
Tramite un decremento di velocità pari a

$$\Delta V = V_p - \sqrt{\frac{\mu_L}{r_p}}$$

effettuato al periselenio, si può immettere il veicolo in un'orbita circolare lunare di raggio r_p.

Bibliografia

Bate R. R., Mueller D. D., White J. E.: *Fundamentals of Astrodynamics*; New York, Dover Publication Inc., 1971.

Castronuovo M. M.: *Analisi di una missione interplanetaria*, "Quaderni di Astrodinamica", volume 1; Roma, Esagrafica s.r.l., 1993.