# 109. La regolarità per i poliedri e i dadi da gioco

*di Giuseppe De Cecco (Università del Salento)*

Nella mia esperienza, ormai più che quarantennale, di insegnante universitario, ho potuto notare che nelle Scuole Superiori lo studio della geometria dello spazio è andato gradualmente scomparendo. Così l'intuizione spaziale ([H]) non soccorre più, poiché essa non è stata più educata. *L'intuizione geometrica* – afferma M.F. Atiyah, uno dei massimi matematici contemporanei – *rimane il canale più potente per la comprensione della matematica e dovrebbe essere incoraggiata e coltivata.*
Inoltre l'intuizione spaziale permette di dare "significato" al linguaggio algebrico, come osserva R. Thom (1923-2002):

> *La decisione dogmatica "modernista" di eliminare la geometria elementare per far spazio all'analisi e all'algebra lineare, offre ben poco per poter essere sostenuta psicologicamente, poiché gli oggetti algebrici (i simboli) sono troppo poveri semanticamente per farsi capire direttamente come nel caso di una figura spaziale.*

In questo articolo mi soffermerò sul concetto di *regolarità* (metrica, combinatoria, probabilistica) per un poliedro, un concetto che ha tenuto impegnati per tanto tempo illustri matematici. Le difficoltà si incontrano già per la stessa definizione di poliedro, poiché in essa si voleva descrivere il concetto di "poliedro che abbiamo in mente", un concetto non univoco e difficile da formalizzare.
Ebbene mi sembra che tante questioni inerenti ai poliedri siano attualmente trascurate nelle Scuole secondarie in nome di nuove mode, mentre esse non sono per nulla sorpassate, anche a livello di ricerca avanzata[1]. Infatti lo studio dei poliedri in generale e di quelli regolari in particolare è stato fonte di ricerche che attraversano tutta la storia della matematica dai primordi ai nostri giorni, coinvolgendo diverse discipline, apparentemente lontane tra loro: topologia algebrica e differenziale con studio di singolarità, teoria dei gruppi e teoria dei grafi, algebra commutativa e teoria degli invarianti, teoria dell'ottimizzazione, cristallografia. Inoltre è errore comune pensare che tutto ciò che riguarda i poliedri è noto o che è facile da dimostrare.
Insomma dopo circa 2500 anni i poliedri esercitano ancora il loro fascino. Come afferma ancora Atiyah:

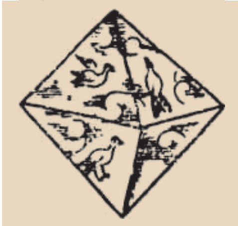
> *La matematica moderna non ha chiesto il divorzio dalla matematica tradizionale come a volte si insinua. I matematici hanno unito le loro forze e si sono proiettati in direzioni diverse ma gli obiettivi di base sono ancora in gran parte gli stessi. La differenza sta più nella forma che nella sostanza e se Newton o Gauss potessero riapparire in mezzo a noi, per capire i problemi in discussione della presente generazione di matematici, basterebbe loro soltanto un breve corso preliminare.*

A mio avviso, seguendo Atiyah, è essenziale recuperare il senso d'unità delle diverse branche della matematica: i loro legami (spesso insospettati) e le analogie non sono accidentali, ma fanno parte della essenza della matematica, che è un'attività umana non un programma per computer. Si può dire che la matematica sia *lo studio delle analogie tra le analogie.*
Ebbene l'argomento scelto si presta bene ad esemplificare questa interdisciplinarità ([C],[Em],[Gr]), che tocca la cristallografia, la biologia, la storia dell'arte e della cultura in generale, persino il gioco con i dadi, come vedremo.
Libri sui poliedri hanno segnato epoche ([G],[G-R]). Durante il Medioevo, per molto tempo, l'unico dialogo di Platone direttamente conosciu-

1 Si veda il libro di P.R. Cromwell [C ], che può considerarsi la "bibbia" sull'argomento.

**cubo - terra**

**tetraedro – fuoco**



**ottaedro - aria**

**icosaedro – aria**

**dodecaedro - universo**

to e letto fu il *Timeo*[2], nel quale i poliedri sono studiati come gli elementi costitutivi della struttura intima del cosmo. Infatti Timeo da Locri, uno dei primi pitagorici, stabilì una corrispondenza mistica tra i quattro solidi più facili da costruire e "i quattro elementi naturali" (fuoco, aria, acqua, terra). *Restava ancora soltanto una quinta combinazione* – come dice Platone – *e Dio se ne servì per ornare il tutto.*

I poliedri regolari sono perciò anche detti "solidi platonici".

Piero della Francesca, il pittore che dà coerente base teorica alla prospettiva centrale, scrive (tra il 1482 e il 1492) il *Libellus de quinque corporibus regularibus,* del quale trattato esiste una versione in volgare nel celebre libro di L. Pacioli *De divina proportione* (1509), illustrato *"con tutta perfectione di prospectiva commo sa el nostro Leonardo da Vinci".* Nel *Mysterium cosmographicum* (1596) Keplero scrive che il Creatore ha tenuto presente i poliedri regolari e che *alla loro natura ha uniformato il numero e la proporzione dei cieli e i rapporti dei moti celesti.*

Infine H. Weyl, nel 1930, trattando del ruolo avuto, nella matematica contemporanea, dal libro di F. Klein *Vorlesungen über das Ikosaeder* scriveva:

> *Il suo Libro-icosaedro è una sinfonia meravigliosa nella quale geometria, algebra, teoria delle funzioni e dei gruppi si armonizzano in una melodia politonale, ma che all'interno viene governata dalla coerenza più profonda.*

Più passa il tempo e più tutte le scienze tendono a matematizzarsi. A mio avviso non bisogna insegnare matematica applicata, ma cercare di creare l'attitudine a scoprire la matematica ovunque essa si applichi. Presentare un argomento nel modo "giusto" non vuol dire presentarlo nel modo più astratto possibile, anzi spesso, in particolare nell'insegnamento nella secondaria di primo grado, il "travestimento ludico" dell'argomento risulta la carta vincente. L'importante è comunicare l'eccitazione intellettuale che si accompagna alla scoperta geometrica e il piacere di capire le scoperte degli altri.

## Poliedri convessi

Attualmente in matematica, come è noto, una definizione non è la descrizione di un oggetto esistente o di un oggetto a cui si attribuisce esistenza (in un mondo di idee platoniche), ma è una costruzione del nostro pensiero: l'oggetto definito è bloccato dall'avere le proprietà richieste, per cui dobbiamo accettare poi anche le eventuali figure che verificano la nostra definizione ma che a priori non ci saremmo aspettati di includere.

Euclide non definisce i poliedri in maniera esplicita, ma nel Libro XI implicitamente si deduce che per lui un poliedro è un *"solido delimitato da facce piane".* Ora un solido, nell'accezione comune, è costituito da un sol pezzo; quindi nel concetto di solido è implicita l'idea che il bordo di un poliedro (cioè la superficie che delimita il poliedro) divida lo spazio (in cui esso è immerso) in due parti, una limitata da chiamarsi *interna* e una illimitata da chiamarsi *esterna.* Ciò suggerisce di porre a fondamento del concetto di poliedro il teorema di C. Jordan[3] (1838-1922), sul quale non ci fermiamo.

2 Nell'affresco di Raffaello "Scuola d'Atene", Platone ha in mano proprio questo libro.

3 Se $\Pi$ è una (superficie) poliedrica semplice e chiusa, allora essa divide lo spazio in cui è immersa in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera $\Pi$. Per una dimostrazione elementare si può vedere [DC].

Nella definizione di Euclide rientrano ovviamente i poliedri ordinari (cubo, parallelepipedo, piramidi, …) ma anche i poliedri anulari, i poliedri cavi e tutti quelli che sono delimitati da facce piane.
Per eliminare questi "casi non voluti" dobbiamo chiedere che il poliedro sia *convesso,* cioè se A e B sono due punti qualsiasi del poliedro richiediamo che il segmento di estremi A e B appartenga interamente al poliedro. Possiamo allora dare la seguente definizione, che si trova anche in testi scolastici.

> *Si dice poliedro convesso (o semplicemente poliedro) ogni sottoinsieme limitato dello spazio, che si ottiene come intersezione di un numero finito di semispazi (chiusi).*

Per evitare casi patologici (per esempio un segmento) chiediamo anche che la parte interna del poliedro sia non vuota.
Si prova facilmente che, se $V$ è un punto interno al poliedro $X$, allora ogni semiretta di origine $V$ incontra soltanto in un punto il contorno di $X$.
Sia $X$ un poliedro convesso ed $O$ il suo centro di gravità o *baricentro* (certamente interno a $X$). Se $V$ è un vertice di $X$, il piano passante per $V$ ed ortogonale alla retta $OV$ è detto *piano polare* di $V$; tutti i piani polari dei vertici di $X$ individuano un nuovo poliedro $X^*$, detto *poliedro duale* di $X$, i cui vertici sono i poli delle facce di $X$.
Per esempio sono duali tra loro il cubo e l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, mentre il tetraedro è autoduale.

## Poliedri metricamente regolari

Una faccia di un poliedro si dice *regolare* se è costituita da un poligono regolare (cioè un poligono equilatero ed equiangolo). Un vertice del poliedro è detto *regolare* se tutte le coppie di spigoli consecutivi uscenti da esso formano angoli congruenti. Due vertici sono detti *congruenti* se in essi concorre lo stesso numero di spigoli e se inoltre sono congruenti gli angoli (piani) tra gli spigoli corrispondenti e gli angoli diedri corrispondenti. Siamo ora in grado di dare la definizione di poliedro regolare, attualmente più usata.

> *Un poliedro è (metricamente) regolare se le facce e i vertici sono regolari e congruenti.*

Quindi si chiede che le facce siano disposte nello stesso modo attorno a ciascun vertice e analogamente che i vertici siano disposti allo stesso modo in ogni faccia; cioè, guardando il poliedro, non troviamo vertici o facce privilegiate.
Come è noto esistono infiniti tipi di poligoni regolari, mentre (tenendo conto che in un vertice la somma degli angoli che vi concorrono deve essere inferiore all'angolo giro) si vede facilmente che esistono solo *5* tipi di poliedri (metricamente) regolari. Essi, come è noto, sono il tetraedro, il cubo o esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

Si osservi che alla definizione di regolarità data sono associate le seguenti richieste (che compaiono in alcuni libri di testo):
– le facce devono essere congruenti,
– le facce devono essere poligoni regolari.
Ma queste due richieste non caratterizzano completamente l'idea di poliedro regolare, poiché trascurano di considerare gli angoloidi. Una bipiramide costituita da triangoli equilateri verifica le condizioni (i) e (ii), ma non è regolare, secondo la nostra definizione. Possiamo certo cambiare la definizione, ma non possiamo più concludere che esistono solo 5 tipi di poliedri regolari. Se però chiediamo che il nostro poliedro sia inscrivibile in una sfera come fa Euclide implicitamente, allora segue che tutti gli angoli solidi e diedrali sono congruenti e tutti i vertici sono circondati dallo stesso numero di facce, cioè il poliedro è regolare.
Commentatori degli *Elementi,* dagli Scolastici in poi, hanno discusso la storia dei solidi regolari considerando le scoperte dei singoli solidi, tenendo conto che essi si ritrovano anche in natura sotto forma di cristalli: la fluorite ha la forma tetraedrica o ottaedrica, la magnetite e il diamante quella ottaedrica, il salgemma e la pirite si trovano spesso nella forma cubica. Anche lo scheletro di alcuni radiolari ha la forma di poliedri regolari [DT].

> Tuttavia – come dice W.C. Waterhouse [W] – *la scoperta di questo o quel particolare solido era secondaria; la scoperta cruciale era il concetto preciso di solido regolare. La lunga familiarità con*

*questo concetto ce lo fa apparire ovvio, ma così non è. Si possono conoscere i modelli dei solidi platonici, senza essere in grado di isolare le proprietà comuni che li caratterizzano. Noi abbiamo il concetto matematico di solido regolare solo perché alcuni matematici lo hanno inventato.*

L'astrazione è la vera molla della ricerca in matematica!
L'esistenza di esattamente cinque solidi regolari è un bel teorema di classificazione, facile da dimostrare anche in una scuola secondaria di primo grado, ma esso non può essere dimostrato senza una definizione astratta di solido regolare. Un ulteriore passo è stato poi la formalizzazione del concetto di poliedro semiregolare, fissando l'attenzione su qualche proprietà non caratterizzante i poliedri regolari. Così Archimede (287-212 a.C.), richiedendo una "regolarità più debole", perviene alla scoperta del solidi che portano il suo nome.

## Poliedri semiregolari

Indeboliamo ora le condizioni che intervengono nella definizione di poliedro regolare.

*Un poliedro si dice archimedeo se le facce sono regolari ma non congruenti e i vertici sono congruenti ma non regolari.*

Si riconosce che esistono *15* tipi di poliedri archimedei con l'avvertenza che *13* sono individuati a meno di similitudini, mentre due (prismi e antiprismi) ammettono infiniti sottotipi ciascuno.

*I poliedri duali degli archimedei*[4] *sono quelli che hanno vertici regolari ma non congruenti e facce congruenti ma non regolari.*

Ogni poliedro archimedeo è inscrivibile in una sfera, mentre uno duale è circoscrivibile ad una sfera. La classificazione dei poliedri archimedei duali coincide con quella dei poliedri archimedei. Insieme vengono detti *poliedri semiregolari* (cfr. [C-R], [E]).

## Gruppo di simmetria di un poliedro

Sia $E$ lo spazio ordinario; una *isometria* di $E$ è una trasformazione di $E$ in sé che conserva le distanze, quindi la composizione di una traslazione (in particolare l'identità) con una trasformazione ortogonale (simmetria rispetto ad un piano, rotazione intorno ad una retta, rotosimmetria). L'insieme delle isometrie di $E$, $Iso(E)$, rispetto alla composizione di applicazioni, costituisce un gruppo, detto anche *gruppo euclideo.*
Data una figura $X$ di $E$, chiamiamo *gruppo di simmetria* di $X$, $S(X)$, il sottogruppo di $Iso(E)$ costituito dalle isometrie di $E$ che lasciano fissa la figura $X$; $S(X)$ è isomorfo al gruppo delle isometrie di $X$. Se $X$ è un poliedro, allora $S(X)$ è finito essendo contenuto nel gruppo di permutazione dei vertici (in numero finito) di $X$. Inoltre se $X^*$ è il poliedro duale di $X$, allora $S(X) = S(X^*)$.
Storicamente i gruppi di simmetria dei poliedri sono stati i primi esempi di gruppi algebrici. $S(X)$ "misura il grado di armonia" di una figura, essendo la parola "simmetria" intesa nel senso greco, cioè ordine e proporzione tra le parti di un tutto. Quanto più grande è il gruppo, tanto più la figura è esteticamente armonica, bella!
Ad esempio, il gruppo di simmetria del tetraedro ha *24* elementi, quello del cubo e dell'ottaedro ha *48* elementi, quello del dodecaedro e dell'icosaedro ha *120* elementi, quello della sfera ha infiniti elementi.
Proprietà dei poliedri si traducono in proprietà sui loro gruppi di simmetria: un poliedro $X$ è regolare se il suo gruppo di simmetria è transitivo sulle terne $(v, l, f)$, dove $v, l, f$ sono rispettivamente un vertice, un lato e una faccia di $X$, tali che $v$ sia estremo di $l$, lato di $f$. Essere *transitivo* vuol dire che se $(v, l, f)$ e $(v', l', f')$ sono due arbitrarie terne (del tipo sopra detto), allora esiste un elemento $g$ di $S(X)$, cioè un movimento (che lascia fisso il centro di gravità) tale $g(v, l, f)=(v', l', f')$. Questo formalizza l'idea che ogni vertice e ogni faccia del poliedro regolare ha la stessa configurazione quando lo si osserva.
La transitività del gruppo di simmetria può essere utilizzata per definire la regolarità (metrica) dei

4 Tali poliedri sono anche detti poliedri di E. C. Catalan (1814 -1894).

poliedri di dimensione arbitraria *d* (detti anche *politopi*). Si dimostra che

*per d=2 esistono infiniti poligoni regolari;*
*per d=3 esistono solo 5 tipi di poliedri regolari;*
*per d=4 esistono solo 6 tipi di poliedri regolari;*
*per d≥5 esistono solo 3 tipi di poliedri regolari.*

Per $d \geq 3$ si hanno poliedri regolari rispettivamente di

$d+1$, $2d$, $2^d$ *facce.*

Per $d=3$ si hanno in più poliedri regolari con *12, 20* facce; per $d=4$ si hanno in più poliedri regolari con *24, 120, 600* facce.

## Poliedri combinatoriamente regolari

Nella definizione di poliedri metricamente regolari l'attenzione è rivolta in particolare alla misura dei lati e degli angoli; nella seguente definizione vengono trascurate quelle richieste, fissando l'attenzione alle condizioni d'incidenza.

*Un poliedro (convesso) combinatoriamente regolare è un poliedro tale che in ogni vertice concorrono n spigoli ed ogni faccia è limitata dallo stesso numero r di spigoli.*

Se indichiamo con $\alpha_0$ il numero dei vertici del poliedro, con $\alpha_1$ il numero dei lati e con $\alpha_2$ quello delle facce, si ha (nelle nostre ipotesi)

$$n\alpha_0 = 2\,\alpha_1 = r\,\alpha_2.$$

Ricordando la formula di Eulero ($\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$) e tenendo conto che *n* ed *r* sono numeri naturali maggiori o uguali a *3,* si conclude che le classi dei poliedri convessi combinatoriamente regolari sono in corrispondenza biunivoca con le classi dei poliedri metricamente regolari.
Così nella classe dei parallelepipedi troviamo il cubo, che può considerarsi un rappresentante "bello" della classe.

## Poliedri probabilisticamente regolari

I poliedri probabilisticamente regolari sono quelli regolari nel senso del Calcolo delle probabilità, cioè quelli che, se lanciati come dadi, hanno le facce equiprobabili. Ciò si verifica per esempio se il poliedro ha le facce congruenti e simmetriche rispetto ad un punto (il centro di gravità), come accade per i poliedri metricamente regolari. Se consideriamo un poliedro con facce congruenti, la condizione che le facce appaiano alla vista indistinguibili si può formalizzare nel modo seguente, usando il concetto di transitività per facce, che porta alla definizione di *isoedro.*

*Un poliedro è un isoedro se, per ogni coppia di facce, esiste una isometria che porti la prima faccia nella seconda.*

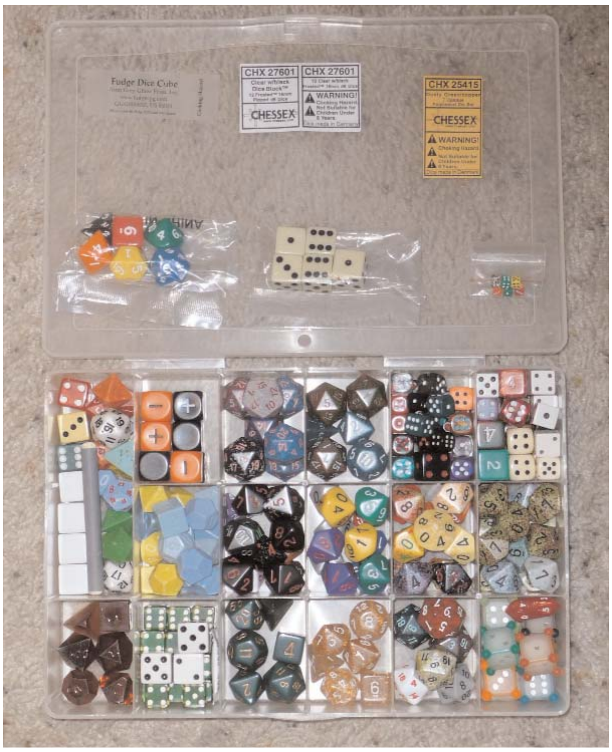
Molti poliedri non convessi sono transitivi per facce ma noi ci limitiamo a quelli convessi. Grünbaum e Shepard [G-S] hanno dato una completa caratterizzazione degli isoedri[5]: ne esistono *30* tipi di cui *5* famiglie infinite. In particolare sono inclusi i poliedri regolari e i duali degli archimedei. Tutti gli isoedri sono ovviamente "buoni" dadi e si dimostra che tutti hanno un numero *pari* di facce. Questo risultato, come vedremo, mostra che il concetto di isoedro non cattura completamente l'idea di probabilisticamente regolare, come hanno messo in evidenza P. Diaconis[6] e J.B. Keller [D-K], che, con considerazioni di continuità, pervengono ad ammettere l'esistenza di dadi poliedrali con facce non congruenti.
Infatti se tagliamo una bipiramide (con base un poligono regolare e facce triangoli isosceli congruenti) con due piani paralleli alla base ed equidistanti da essa, otteniamo un solido con facce in generale non congruenti tra loro. Se i tagli sono vicini ai vertici, il solido ha piccola probabilità di cadere sulle nuove facce, mentre se i tagli sono vicini alla base, c'è alta probabilità che cada sulle basi. Per continuità è lecito supporre che esistano tagli tali che le $2n+2$ facce abbiano tutte la stessa

5 Cfr. http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.ht,l
6 Persi Diaconis, professore di Statistica, in origine era un prestidigitatore ed ha tenuto la seduta plenaria di chiusura del Congresso Internazionale di Matematica a Berlino nel 1998.

probabilità (uguale a *1/(2n+2))*. La posizione dei tagli non è prevedibile e forse può essere ricavata solo mediante esperimenti.
Analogamente possiamo partire da un prisma infinito proiettante un *n*-agono regolare e facendo tagli con piani perpendicolari alle generatrici ottenere (almeno in teoria) un poliedro con *n+2* facce equiprobabili. Si osservi che in tal caso *n+2* può essere anche dispari.
Non mi risulta, che, almeno per ora, si conosca una caratterizzazione geometrica dei poliedri probabilisticamente regolari, adatti quindi ad essere considerati come buoni dadi.

## Dadi poliedrali

Qualche anno fa, tutti abbiamo visto in negozi di giocattoli dadi non cubici, ma poliedrali, usati in generale per giochi cosiddetti "di ruolo" (ad esempio *Dungeons & Dragons*); le facce poi contengono spesso non numeri ma lettere dell'alfabeto.
Il fatto mi incuriosì e decisi di approfondire l'argomento. Penso che anche gli studenti delle scuole superiori possono essere stimolati da questo argomento a studiare con rinnovato interesse i poliedri, in particolare quelli regolari e semiregolari. Spesso una applicazione "concreta" di un argomento basta a tener desta l'attenzione. Inoltre, come ho potuto constatare personalmente più volte, i modelli dei poliedri, realizzati in cartoncino, in legno, in cristallo non lasciano indifferenti grandi e piccoli, che spontaneamente sono portati a riflettere su particolari proprietà e simmetrie.
Come è noto, da tempi remoti, per ragioni magiche e per gioco, è stato usato l'*astragalo (αστραγα´λος* = vertebra), un osso del tarso, fra il calcagno e la tibia, foggiato ad arco con la convessità verso l'alto. Si trovano astragali preistorici usati forse per contare e molti di essi hanno una lettera o lettere su una parte. Poi, ad imitazione della forma dell'astragalo di capra o di montone, vennero costruiti dadi oblunghi d'avorio, di pietra o altro materiale, numerati con punti sulle quattro facce allungate. Essi furono usati non solo per predire il futuro, ma per giocare agli *ossetti* o *aliossi* (dal lat. *aleae ossum)*. L'idealizzazione dell'astragalo ha probabilmente dato origine ai dadi[7] che appaiono quasi simultaneamente in differenti parti del globo [D], e in forma non solo di cubo, ma spesso di tetraedro, icosaedro e dodecaedro. Dadi tetraedrali di avorio e di lapislazzuli sono stati trovati nelle tombe reali sumeriche di Ur (circa 3000 a.C.) ([G] e [G-R]); dadi icosaedrici della dinastia tolemaica sono visibili al British Museum di Londra; in Italia, scavi su monte Loffa[8] (nei colli Euganei) hanno portato alla luce un dodecaedro etrusco in steatite, probabilmente usato come giocattolo 2500 anni fa. Ancora oggi si usano dadi oblunghi per giocare a Chausar e dadi semicilindrici per giocare a Senet [Gf]. Gli stessi poliedri regolari per le loro simmetrie e bellezza hanno sempre avuto una connotazione magica.
Probabilmente il dado cubico si è imposto perché è il più semplice da produrre. Ovviamente caratteristica essenziale per un "buon" dado deve essere la equiprobabilità delle sue facce, cioè non debbono esistere facce privilegiate. Ciò è raggiunto




**Heath bar- My dice box**
**http://www.flickr.com/photos/heathbar/3342822834/**

7 La parola "dado" quasi certamente proviene dal latino "datum", participio passato del verbo "dare" nel senso di "gettare". I Romani li chiamavano "tesserae" e i Greci "κύβοι".
8 Cfr. S. De Stefani, *Intorno un dodecaedro quasi regolare di pietra a facce pentagonali scolpite con cifre scoperto nelle antichissime capanne di pietra del Monte Loffa,* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, S. 6,4 (1886).

usualmente se il materiale è omogeneo e il poliedro ha tutte facce uguali, simmetriche rispetto al suo baricentro. I dadi antichi non sempre sono buoni dadi a causa di irregolarità. Sembra che né i Greci né i Romani abbiano mai parlato di "probabilità", pur riconoscendo nella caduta dei dadi l'immagine di un evento fortuito, accidentale, imprevisto. Tuttavia esistono antichi dadi e astragali truccati per esempio con piombo. Ma come osserva acutamente R. Ineichen [I], modificare una tendenza di un dado vuol dire avere un'idea del fenomeno della "stabilità statistica", della cosiddetta "legge empirica del caso". Forse la tendenza è stata trovata ripetendo più volte le prove ed annotando i risultati. Altrimenti perché truccare un dado?

Nell'antichità "probabile"[9] era un attributo di una opinione, attributo di una proposizione garantita da un'autorità, ovvero aveva il significato di plausibile, di grande credibilità. E questi attributi non avevano niente a che fare con i giochi d'azzardo ([I]).

## BIBLIOGRAFIA

[C] P. R. Cromwell, *Polyhedra,* Cambridge University Press, 1997.

[C-R] H.M. Cundy, A.P. Rollett, *I modelli matematici,* (presentazione di P. Canetta), Feltrinelli, Milano 1974.

[D] F.N. David, *Games, Gods and Gambling,* Charles Griffin & Co.Ltd, London 1962.

[DC] G. De Cecco, *Il teorema di separazione di Jordan,* Archimede, 4, (1976), 193-200.

[D-K] P. Diaconis, J. B. Keller, *Fair Dice,* Amer. Math. Montly 96,(1989), 337-339, http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/fairdice.pdf

[DT] D'Arcy W. Thompson, *Crescita e forma,* Bollati-Boringhieri, 1992.

[E] *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* (a cura di L. Berzolari, G. Vivami, D. Gigli), Hoepli.Milano 1937.

[Em] M. Emmer, *Art and Malhematics: thè Platonic solids,* in "Leonardo", voi. 15 (4),(1982), 277-282.

[G] P. Gario, *L'immagine geometrica del mondo (Storia dei poliedri),* Stampatori Ed. Torino 1979.

[Gf] F.V. Grunfeld, *Giochi nel mondo,* Unicef 1990.

[Gr] U. A. Graziotti, *Polyhedra, The realm og geometric beauty,* S. Francisco 1972

[G-R] L. Giacardi, S.C. Roero, *La matematica delle civiltà arcaiche,* Stampatori Ed. Torino 1979.

[G-S] B. Grünbaum, G.C. Sbepard, *Sferical tilings with transiti-vity properties,* in *TTte Geometrie Vein:* The Coxeter Fesf-schrift, C. Davis, B. Grunbaum and F. Shenk editors, Springer- Verlag, New York, 1982.

[H] D. Hilbert, S. Cohn Vossen, *Geometria intuitiva,* Boringhieri, 1960.

[I] R. Ineichen, *Dadi, astragali e calcolo delle probabilità,* Quaderno n.2000-04, Facoltà di Scienze Economiche, Lugano.

[W] W.C. Waterhouse, *The discovery of the regular solids,* Arch. Hist. Exact Sci., voi. 9 (1979), 212-221.

9 Dal latino "probus", buono.