101. Un criterio di divisibilità generalizzato

di Paolo La Rocca[1]

Sunto
In questo articolo viene presentato un criterio di divisibilità per un qualunque numero purché sia coprimo di 10. Di questo criterio si offre una dimostrazione basata sulla soluzione di un'equazione diofantea lineare. Il metodo per risolvere l'equazione offre un esempio significativo di utilizzo del foglio di calcolo elettronico.

Abstract
In this paper a divisibility criterion for any number coprime of 10 is presented. A proof based on the solution of a liner diophantine equation is given. The equation is solved with the aid of the spreadsheet, showing a significant example of the use of this tool.

1 Introduzione

È noto ad un qualunque studente di matematica che esistono dei criteri per determinare se un numero naturale N è divisibile per un numero naturale $d < N$. Tali criteri sono utili in quanto permettono una verifica della divisibilità meno laboriosa della divisone diretta di N per d.
Ad esempio, un numero è divisibile per 2 se e solo se la cifra delle unità è pari; un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3 (un analogo criterio esiste per il 9); un numero è divisibile per 5 se e solo se la cifra delle unità è 0 oppure 5.
In generale utilizzare un criterio di divisibilità per un numero d, significa sostituire ad N una sua funzione $f(N)$ che assume valori interi e tale che $|f(N)|< N$, che sia divisibile per d se e solo se N è divisibile per d. Ad esempio, nel criterio di divisibilità per 3 la funzione f è "somma di tutte le cifre" (vedi Vorob'ev [1] e per alcune notizie storiche e un confronto tra diversi criteri vedi anche Di Stefano [2]). Consideriamo il seguente criterio di divisibilità per 7, meno noto degli altri:

Un numero naturale N è divisibile per 7 se e solo se è divisibile per 7 il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e sottraendo il prodotto di tale cifra per 2 dal numero formato dalle rimanenti cifre di N.

Ad esempio per determinare se 41265 è divisibile per 7 si cancella il 5, ottenendo 4126; si sottrae 10 (prodotto della cifra eliminata 5 per 2) ottenendo 4116. Reiterando la procedura si ottengono i numeri 399 e 21. Poiché 21 è divisibile per 7, lo è anche il numero originario 41265 (si può anche reiterare un'altra volta arrivando a 0, che è divisibile per 7).
In questo articolo discuteremo una dimostrazione elementare di tale criterio, che può essere proposta come percorso di approfondimento a livello di scuole superiori, e che può essere facilmente generalizzata per produrre criteri di divisibilità per qualunque numero che termini con le cifre 1,3,7,9; in particolare dunque per qualunque numero primo (eccetto 2 e 5). È evidente l'interesse che tale tipo di problematiche ha anche per la determinazione della primalità di un numero (vedi D'Andrea [3]).
Useremo la notazione $d \mid N$ per indicare che d è un divisore di N, ovvero che N è un multiplo di d; ad esempio $3 \mid 24$, in quanto $3 \cdot 8 = 24$.

[1] Docente presso il Liceo Scientifico J.F.Kennedy, Roma; email: paololar@libero.it

2 Il criterio di divisibilità per 7

Premettiamo la seguente

Proposizione 1
Siano $d, A, B \in \mathbf{N}$, $d \mid A$ e $d \mid B$ se e solo se $d \mid (Ax + By)$ per ogni $x, y \in \mathbf{Z}$

In altre parole se un numero è divisore di un numero A e di un numero B, è anche divisore di una qualunque combinazione lineare di A e B a coefficienti interi (e viceversa). Il teorema diretto segue dalla proprietà distributiva della divisione; quello inverso si ottiene ponendo $x = 1$ e $y = 0$, oppure $x = 0$ e $y = 1$.

Vediamo come si può riformulare il criterio di divisibilità per 7 sopracitato utilizzando la scrittura polinomiale dei numeri in base 10.
Consideriamo un generico numero di tre cifre $N = abc$ (vedremo che ciò non comporta alcuna perdita di generalità), cioè in forma polinomiale $N = 100a + 10b + c$. La funzione f su cui si effettua la verifica di divisibilità per 7, espressa in termini delle tre cifre a,b,c è: $f(N) = 10a + b - 2c$; infatti cancellando la cifra dell'unità, a diventa la cifra delle decine mentre b quella della unità. Il criterio di divisibilità per 7, riferito a numeri di 3 cifre, viene dunque espresso dalla seguente:

Proposizione 2
Sia $N = abc$ un numero naturale scritto in forma decimale, essendo a, b e c cifre comprese tra 0 e 9; si ha:
$7 \mid 10a + b - 2c \quad$ se e solo se $\quad 7 \mid 100a + 10b + c$.

In realtà si potrebbe utilizzare una notazione più compatta, scrivendo il generico numero come $10q+u$, dove q è il quoziente della divisione per 10 e u il resto, cioè le unità. Si è però preferito utilizzare la notazione decimale estesa per ragioni di chiarezza, pensando questo come un percorso didattico di approfondimento per le scuole superiori, coerentemente con la scelta adottata da ottimi libri di testo in commercio come ad esempio quello di Lamberti, Mereu e Nanni [4]. L'equazione a cui si perviene, la (3) nelle pagine seguenti, che è la base per i risultati ottenuti, risulta comunque indipendente da tale scelta.

La dimostrazione consiste nel trovare una combinazione lineare dei due numeri che sia divisibile per 7. Si può procedere sottraendo ripetutamente da N il numero $10a + b - 2c$ finché non si arriva ad un numero divisibile per 7. Sono necessari 3 passi:

$$\begin{array}{rl}
100a + 10b + c & - \\
10a + \;\; b - 2c & \\
\hline
\mathbf{90a + 9b + 3c} & - \\
10a + \;\; b - 2c & \\
\hline
\mathbf{80a + 8b + 5c} & - \\
10a + \;\; b - 2c & \\
\hline
\mathbf{70a + 7b + 7c} &
\end{array}$$

Si ha dunque:
$70a + 7b + 7c + 3(10a + b - 2c) = 100a + 10b + c$

Poiché $70a + 7b + 7c$ è divisibile per 7, se $10a + b - 2c$ è divisibile per 7 lo è anche il secondo membro, cioè N (Proposizione 1). Viceversa, sempre per la Proposizione 1, se N è divisibile per 7 lo è anche $3(10a + b - 2c)$ e dunque $10a + b - 2c$, essendo 3 e 7 primi tra loro. La Proposizione 2 è così dimostrata.

Si può osservare che si sarebbe arrivati allo stesso risultato anche partendo da un numero con più di 3 cifre, ad esempio con 4 cifre, a, b, c, d saremmo arrivati a $700a + 70b + 7c + 7d$ ecc. Dunque nel seguito, per semplicità, faremo riferimento a numeri di 3 cifre.

3 Il criterio di divisibilità in generale

Ci proponiamo di stabilire in quali casi vale la seguente:

Proposizione 3
Un numero naturale N è divisibile per d se e solo se è divisibile per d il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e aggiungendo il prodotto di tale cifra per un opportuno numero intero x (moltiplicatore) al numero formato dalle rimanenti cifre di N.

Questo criterio è menzionato ad esempio nell'ar-

ticolo *Divisibility criterion* dell'Enciclopedia della matematica [5] dove si parla però di una sua possibile generalizzazione solo per numeri della forma $10^k c \pm 1$, dove c è un numero intero.
Il caso $d = 7$ rientra in questa formulazione più generale se si pone $x = -2$ (sottrarre 2 volte un numero equivale ad aggiungere – 2 volte lo stesso numero). Vediamo qual è la condizione che deve essere soddisfatta affinché esista tale numero. Consideriamo prima il caso di divisori $d < 10$. La funzione su cui verificare la divisibilità vale $f(N) = 10a + b + xc$. Il numero di passi, cioè il numero di volte che deve essere sottratta $f(N)$per arrivare ad un numero divisibile per d, è $n_{step} = 10 - d$. Il coefficiente di c a cui si arriva dopo tale numero di passi è $1 - n_{step}x$. Si ha un criterio di divisibilità se e solo se tale numero è uguale a d o ad un suo multiplo intero, in modo che tutti i coefficienti siano divisibili per d. Ciò avviene quando è soddisfatta la seguente equazione:

$$1 - n_{step}x = md \quad \text{con } m \in \mathbf{Z},$$

cioè,

(1) $$1 - (10 - d)x = md$$

Si ha un criterio di divisibilità per d della forma della Proposizione 3, se e solo se tale equazione ammette soluzioni (x,m) intere.
Consideriamo ora il caso di divisori $d > 10$.
Il numero di passi è $n_{step} = d - 10$ e per arrivare ad un numero divisibile per d occorre ora aggiungere ad N il numero $f(N) = 10a + b + xc$. Si arriva dunque all'equazione:

$$1 + n_{step}x = md \quad \text{con } m \in \mathbf{Z},$$

cioè,

(2) $$1 + (d - 10)x = md,$$

che è equivalente alla (1). Le equazioni (1) e (2) possono essere riscritte come:

(3) $$(10 - d)x + md = 1,$$

che è un'equazione diofantea lineare (un'equazione diofantea è un'equazione a coefficienti interi), per cui si cercano soluzioni intere nelle incognite x ed m, della forma $ax + bm = c$, dove i coefficienti a e b dipendono da d, mentre c è uguale ad 1. Sappiamo dalla teoria delle equazioni diofantee, vedi ad esempio Courant e Robins [6], oppure Andrews [7] che tale equazione ammette soluzioni se e solo se c è un multiplo di M.C.D.(a,b).
Nel caso dell'equazione (3), poiché $c = 1$, essa ammetterà soluzioni se e solo se M.C.D.$(10 - d, d) = 1$, cioè ancora se e solo se 10 e d solo primi tra loro, il che si verifica per tutti e soli i numeri che terminano con le cifre 1,3,7,9. Sappiamo inoltre che se (x_0, m_0) è una soluzione particolare dell'equazione, la soluzione generale è della forma:

$$x = x_0 + kd$$

(4) $$m = m_0 - k(10 - d),$$

dove k è un qualunque numero intero. Rimane il problema di trovare una soluzione particolare dell'equazione. Poiché per il criterio di divisibilità in studio siamo interessati in particolare all'incognita x, abbiamo esplicitato l'equazione (3) rispetto ad x, ottenendo:

(5) $$x = \frac{md - 1}{d - 10}$$

Questa può essere considerata una funzione aritmetica nelle variabili m, d, che può essere studiata con l'ausilio del foglio di calcolo. Nella Tabella 1 si riportano i valori di x ottenuti con il foglio di calcolo per valori di $8 \leq m \leq 5$ e valori di $1 \leq d \leq 41$ (prima colonna).
A ciascun valore intero di x corrisponde un criterio di divisibilità per il corrispondente numero d.

Dalla tabella risulta che si ha $x = 3$ per $d = 29$ (in corrispondenza di $m = 2$). Consideriamo il numero $29 \cdot 3728 = 108112$ (che quindi sappiamo essere divisibile per 29). Verifichiamo che l'algoritmo del criterio di divisibilità (Proposizione 3) ci fornisce la divisibilità del numero; applicandolo ripetutamente a 108112 si ottengono i numeri: 10817, 1102, 116, 29; dunque 108112 è divisibile per 29.
Dalla tabella risulta $x = -4$ per $d = 41$. Consideriamo il numero $41 \cdot 98658 = 4044978$. Applicando a tale numero l'algoritmo otteniamo in successione: 404465, 40426, 4018, 369, 0; quindi 4044978 è divisibile per 41.

d	m=-8	m=-7	m=-6	m=-5	m=-4	m=-3	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
1	1	0,8888889	0,7777778	0,6666667	0,5555556	0,4444444	0,3333333	0,222222	0,111111	0	-0,111111	-0,222222	-0,333333	-0,444444
2	2,125	1,875	1,625	1,375	1,125	0,875	0,625	0,375	0,125	-0,125	-0,375	-0,625	-0,875	-1,125
3	3,5714286	3,1428571	2,7142857	2,2857143	1,8571429	1,4285714	1	0,571429	0,142857	-0,285714	-0,714286	-1,142857	-1,571429	-2
4	5,5	4,8333333	4,1666667	3,5	2,8333333	2,1666667	1,5	0,833333	0,166667	-0,5	-1,166667	-1,833333	-2,5	-3,166667
5	8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,2	2,2	1,2	0,2	-0,8	-1,8	-2,8	-3,8	-4,8
6	12,25	10,75	9,25	7,75	6,25	4,75	3,25	1,75	0,25	-1,25	-2,75	-4,25	-5,75	-7,25
7	19	16,666667	14,333333	12	9,6666667	7,3333333	5	2,666667	0,333333	-2	-4,333333	-6,666667	-9	-11,33333
8	32,5	28,5	24,5	20,5	16,5	12,5	8,5	4,5	0,5	-3,5	-7,5	-11,5	-15,5	-19,5
9	73	64	55	46	37	28	19	10	1	-8	-17	-26	-35	-44
10														
11	-89	-78	-67	-56	-45	-34	-23	-12	-1	10	21	32	43	54
12	-48,5	-42,5	-36,5	-30,5	-24,5	-18,5	-12,5	-6,5	-0,5	5,5	11,5	17,5	23,5	29,5
13	-35	-30,66667	-26,33333	-22	-17,66667	-13,33333	-9	-4,666667	-0,333333	4	8,333333	12,666667	17	21,333333
14	-28,25	-24,75	-21,25	-17,75	-14,25	-10,75	-7,25	-3,75	-0,25	3,25	6,75	10,25	13,75	17,25
15	-24,2	-21,2	-18,2	-15,2	-12,2	-9,2	-6,2	-3,2	-0,2	2,8	5,8	8,8	11,8	14,8
16	-21,5	-18,83333	-16,16667	-13,5	-10,83333	-8,166667	-5,5	-2,833333	-0,166667	2,5	5,166667	7,8333333	10,5	13,166667
17	-19,57143	-17,14286	-14,71429	-12,28571	-9,857143	-7,428571	-5	-2,571429	-0,142857	2,285714	4,714286	7,1428571	9,5714286	12
18	-18,125	-15,875	-13,625	-11,375	-9,125	-6,875	-4,625	-2,375	-0,125	2,125	4,375	6,625	8,875	11,125
19	-17	-14,88889	-12,77778	-10,66667	-8,555556	-6,444444	-4,333333	-2,222222	-0,111111	2	4,111111	6,2222222	8,3333333	10,444444
20	-16,1	-14,1	-12,1	-10,1	-8,1	-6,1	-4,1	-2,1	-0,1	1,9	3,9	5,9	7,9	9,9
21	-15,36364	-13,45455	-11,54545	-9,636364	-7,727273	-5,818182	-3,909091	-2	-0,090909	1,818182	3,727273	5,6363636	7,5454545	9,4545455
22	-14,75	-12,91667	-11,08333	-9,25	-7,416667	-5,583333	-3,75	-1,916667	-0,083333	1,75	3,583333	5,4166667	7,25	9,0833333
23	-14,23077	-12,46154	-10,69231	-8,923077	-7,153846	-5,384615	-3,615385	-1,846154	-0,076923	1,692308	3,461538	5,2307692	7	8,7692308
24	-13,78571	-12,07143	-10,35714	-8,642857	-6,928571	-5,214286	-3,5	-1,785714	-0,071429	1,642857	3,357143	5,0714286	6,7857143	8,5
25	-13,4	-11,73333	-10,06667	-8,4	-6,733333	-5,066667	-3,4	-1,733333	-0,066667	1,6	3,266667	4,9333333	6,6	8,2666667
26	-13,0625	-11,4375	-9,8125	-8,1875	-6,5625	-4,9375	-3,3125	-1,6875	-0,0625	1,5625	3,1875	4,8125	6,4375	8,0625
27	-12,76471	-11,17647	-9,588235	-8	-6,411765	-4,823529	-3,235294	-1,647059	-0,058824	1,529412	3,117647	4,7058824	6,2941176	7,8823529
28	-12,5	-10,94444	-9,388889	-7,833333	-6,277778	-4,722222	-3,166667	-1,611111	-0,055556	1,5	3,055556	4,6111111	6,1666667	7,7222222
29	-12,26316	-10,73684	-9,210526	-7,684211	-6,157895	-4,631579	-3,105263	-1,578947	-0,052632	1,473684	3	4,5263158	6,0526316	7,5789474
30	-12,05	-10,55	-9,05	-7,55	-6,05	-4,55	-3,05	-1,55	-0,05	1,45	2,95	4,45	5,95	7,45
31	-11,85714	-10,38095	-8,904762	-7,428571	-5,952381	-4,47619	-3	-1,52381	-0,047619	1,428571	2,904762	4,3809524	5,8571429	7,3333333
32	-11,68182	-10,22727	-8,772727	-7,318182	-5,863636	-4,409091	-2,954545	-1,5	-0,045455	1,409091	2,863636	4,3181818	5,7727273	7,2272727
33	-11,52174	-10,08696	-8,652174	-7,217391	-5,782609	-4,347826	-2,913043	-1,478261	-0,043478	1,391304	2,826087	4,2608696	5,6956522	7,1304348
34	-11,375	-9,958333	-8,541667	-7,125	-5,708333	-4,291667	-2,875	-1,458333	-0,041667	1,375	2,791667	4,2083333	5,625	7,0416667
35	-11,24	-9,84	-8,44	-7,04	-5,64	-4,24	-2,84	-1,44	-0,04	1,36	2,76	4,16	5,56	6,96
36	-11,11538	-9,730769	-8,346154	-6,961538	-5,576923	-4,192308	-2,807692	-1,423077	-0,038462	1,346154	2,730769	4,1153846	5,5	6,8846154
37	-11	-9,62963	-8,259259	-6,888889	-5,518519	-4,148148	-2,777778	-1,407407	-0,037037	1,333333	2,703704	4,0740741	5,4444444	6,8148148
38	-10,89286	-9,535714	-8,178571	-6,821429	-5,464286	-4,107143	-2,75	-1,392857	-0,035714	1,321429	2,678571	4,0357143	5,3928571	6,75
39	-10,7931	-9,448276	-8,103448	-6,758621	-5,413793	-4,068966	-2,724138	-1,37931	-0,034483	1,310345	2,655172	4	5,3448276	6,6896552
40	-10,7	-9,366667	-8,033333	-6,7	-5,366667	-4,033333	-2,7	-1,366667	-0,033333	1,3	2,633333	3,9666667	5,3	6,6333333
41	-10,6129	-9,290323	-7,967742	-6,645161	-5,322581	-4	-2,677419	-1,354839	-0,032258	1,290323	2,612903	3,9354839	5,2580645	6,5806452

Tabella 1. I valori di *x* ottenuti con il foglio di calcolo.

I risultati della tabella suggeriscono alcune considerazioni.

Osservazione 1. Come ci aspettavamo, si ottengono criteri di divisibilità per tutti e soli i numeri che terminano con le cifre 1,3,7,9.

Osservazione 2. A ciascun valore di d corrispondono diversi valori interi di x, che sono congrui modulo d; ciò è evidente ad esempio nelle righe corrispondenti a $d = 11$ e a $d = 9$, ma si può rilevare anche per $d = 3$, $d = 7$ o $d = 13$. Come detto sopra questa è una proprietà generale delle soluzioni delle equazioni diofantee, vedi equazioni (4), che si può comunque dimostrare anche a partire dall'equazione (5). Infatti, supponiamo che per un dato d ci sia un x intero in corrispondenza di un certo m_0. Aggiungendo kd, con k intero, ad entrambi i membri della (5) si ottiene:

$$x + kd = \frac{m_0 d - 1}{d - 10} + kd = \frac{m_0 d - 1 + kd(d - 10)}{d - 10} =$$

$$= \frac{(m_0 + k(d - 10))d - 1}{d - 10};$$

dunque anche $x + kd$ soddisfa la (5) con un valore diverso di m, ed è un altro possibile moltiplicatore nel criterio di divisibilità per d.

Osservazione 3. Si osservano andamenti lineari del valore del moltiplicatore x, per numeri che terminano con la stessa cifra. Ad esempio per $d = 3,13,23$ si ottengono i valori di x rispettivamente di 1,4,7 (incrementano di 3 per ogni decina) e i corrispondenti valori di m sono rispettivamente –2,1,4. Si può dimostrare che tali andamenti proseguono all'infinito. Consideriamo appunto il caso dei divisori che terminano con la cifra 3. I diversi valori di d e di m si possono scrivere in termini di un numero $n \geq 0$ che rappresenta in numero di decine presenti in d:

$$d = 10n + 3 \quad \text{e} \quad m = 1 + 3(n-1);$$

il corrispondente valore di x, per la (5), vale:

$$x = \frac{md-1}{d-10} = \frac{[1+3(n-1)][10n+3]-1}{10n+3-10};$$

svolgendo il prodotto a numeratore e scrivendo i polinomi in forma normale si ottiene:

$$x = \frac{30n^2 - 11n - 7}{10n-7} = 3n+1;$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato l'algoritmo della divisione tra polinomi. Quindi x è intero per ogni n e il suo valore incrementa di 3 unità per ogni decina di d. Ricordiamo che questo è solo un valore del moltiplicatore per d (quello più piccolo in valore assoluto) e ce ne sono infiniti altri congrui ad esso modulo d.
Si possono dunque scrivere delle funzioni lineari che forniscono direttamente i valori dei moltiplicatori per ogni d che termina con le cifre 1,3,7,9.

1° Caso. (d termina con la cifra 1)
Dalla tabella si ha $x = -1$ per $d = 11$, e il valore di x diminuisce di una unità per ogni decina di d; si ha dunque:

$$x = \frac{d-11}{10}(-1) - 1;$$

cioè:

$$x = \frac{-d+1}{10}$$

2° Caso. (d termina con la cifra 3)
Come visto prima si ha $x = 1$ per $d = 3$ e si ha un incremento di 3 unità per ogni decina di d:

$$x = \frac{d-3}{10} \cdot 3 + 1;$$

cioè

$$x = \frac{3d+1}{10}$$

3° Caso. (d termina con la cifra 7).
Dalla tabella si ha $x = -2$ per $d = 7$, e il valore di x diminuisce di tre unità per ogni decina di d; ragionando come negli altri casi si arriva a:

$$x = \frac{-3d+1}{10}$$

4° Caso. (d termina con la cifra 9).
Dalla tabella si ha $x = 1$ per $d = 9$, e il valore di x aumenta di una unità per ogni decina di d; di nuovo come negli altri casi si arriva a:

$$x = \frac{d+1}{10}$$

Determiniamo un criterio di divisibilità per 2817. Il numero termina con la cifra 7 e dunque rientra nel 3° caso. Dalla formula per x si ottiene $x = -845$. Verifichiamo la validità del criterio sul numero $2817 \cdot 98659 = 277922403$. Rimuovendo la prima cifra abbiamo 27792240; aggiungendo $-845 \cdot 3 = -2535$ otteniamo 27789705. Reiterando la procedura otteniamo i numeri 2774745, 273249, 19719, –5634; poiché l'ultimo numero è chiaramente divisibile per 2817, lo è anche il numero originario 277922403.
Determiniamo un criterio di divisibilità per 319. Il numero termina con la cifra 9 e dunque rientra nel 4° caso: $x = 32$. Verifichiamo la validità del criterio sul numero $319 \cdot 845769 = 269800311$. Applicando ripetutamente l'algoritmo del criterio con $x = 32$ otteniamo: 26980063, 2698102, 269874, 27115, 2871, 319. Dunque 26980063 è divisibile per 319.
I risultati ottenuti possono essere riassunti nel seguente:

TEOREMA (CRITERIO DI DIVISIBILITÀ)

Sia d > 1 un numero naturale la cui scrittura decimale termina con le cifre 1,3,7,9. Un numero N > d è divisibile per d se e solo se è divisibile per d il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e aggiungendo il prodotto di tale cifra per un opportuno numero intero x (moltiplicatore) al numero formato dalle rimanenti cifre di N. I valori dei moltiplicatori sono:

$$x = \frac{\pm d + 1}{10} + kd,$$ *per divisori* d *che terminano con le cifre* 9 (+) *o* 1 (–)

$$x = \frac{\pm 3d + 1}{10} + kd,$$ *per divisori* d *che terminano con le cifre* 3 (+) o 7 (–)

dove k è un qualunque numero intero.

Osserviamo che per $d = 11$ oltre al valore $x = -1$ (che corrisponde a rimuovere l'ultima cifra e sottrarla dal numero formato dalle rimanenti cifre) si può utilizzare il valore $x = 10$ che fornisce un criterio altrettanto pratico e che tra l'altro può essere utilizzato anche per $d = 9$. Ad esempio, partendo da $21483 = 9 \cdot 11 \cdot 217$ otteniamo molto rapidamente 2178, 297, 99, che infatti è divisibile sia per 9 sia per 11. Infine poiché vale anche il teorema inverso, possiamo usare l'algoritmo per dimostrare la non divisibilità di un numero per un altro. Ad esempio aggiungendo 9 al numero precedente si ottiene 21492, che non è più divisibile per 11, ma è ancora divisibile per 9. Il criterio con $x = 10$ fornisce 2169, 306, 90, che infatti è divisibile per 9 ma non per 11.

Bibliografia

[1] Vorob'ev, N.N. (1980) *Criteria of divisibility*, University of Chicago Press.

[2] Di Stefano, C. (1998) *Nuovi criteri di divisibilità?*, in: *Didattica delle scienze ed informatica nella scuola*, Anno XXXIII n.193.

[3] D'Andrea, A.(2003) *Complessità e numeri primi*, Archimede, 3, 115-120.

[4] Lamberti, L., Mereu, L., Nanni A. (2007) *Corso di matematica*, Algebra 1, Etas, Milano.

[5] Nechaev, V.I. (1989) *Divisibility criterion, in: Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 3, 284-285.

[6] Courant, R., Robbins, H. (1996) *What is Mathematics*, Oxford University Press.

[7] Andrews,G.E. (1971) *Number theory*, Dover Publications, New York.