

74. Geogebra, per operare dinamicamente con la matematica

di Sergio Balsimelli

[s.balsimelli@tiscalinet.it, <http://utenti.lycos.it/sergiobalsi/>]

Sunto. *Geogebra è un software libero e multi-piattaforma, che permette di operare in modo attivo con la matematica (geometria, algebra ed analisi). Con esso è possibile disegnare punti, segmenti, rette, coniche, funzioni e soprattutto è possibile modificarle dinamicamente. Contemporaneamente in una apposita finestra di algebra vengono visualizzate le coordinate dei punti e le misure di segmenti, angoli, perimetri, aree. La finestra dei numeri e quella delle figure interagiscono dinamicamente tra di loro. Di seguito si presentano alcune attività didattiche che si possono svolgere con studenti della scuola secondaria di primo grado.*

1. Presentazione del software

Geogebra è un software didattico per l'insegnamento della geometria, ma non solo, che fa parte del gruppo di software detti di "geometria dinamica". E' abbastanza simile al più noto Cabri gèomètre. A differenza di quest'ultimo è un software open-source rilasciato sotto licenza GNU GPL (*General Public Licence*); ossia il software può essere usato, copiato e distribuito liberamente, purché non a scopo di lucro. Si può scaricare dal sito del progetto [1]. Ideatore e principale sviluppatore è Markus Hohenwarter [2] della Florida Atlantic University (USA). Esiste un forum, in più lingue (italiano compreso), dove è possibile scambiare consigli e informazioni [3]. Esistono poi aree Wiki in diverse lingue dove è possibile pubblicare i propri materiali oppure scaricare quelli degli altri. Infine segnalo alcuni usi artistici di Geogebra: il GeoGebra Art Project [4] e le cartoline realizzate dall'I.I.S.S. Vivante di Bari [5].

La differenza sostanziale tra Geogebra e Cabri è che il primo dà una duplice vista degli oggetti: ad ogni espressione nella "finestra algebra" corrisponde un oggetto nella "finestra geometria" e viceversa. Geogebra presenta infatti una barra di input che permette di inserire numeri, angoli, vettori, punti, rette e coniche attraverso le coordinate o le loro equazioni.

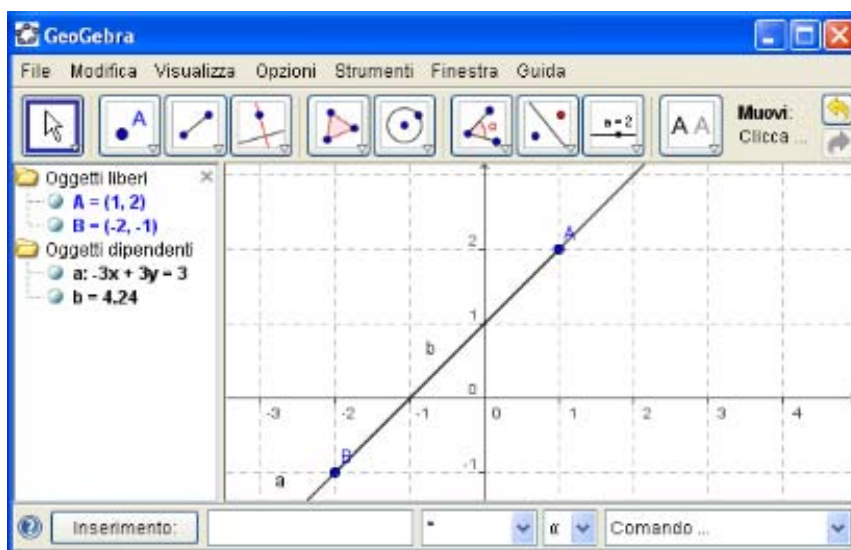
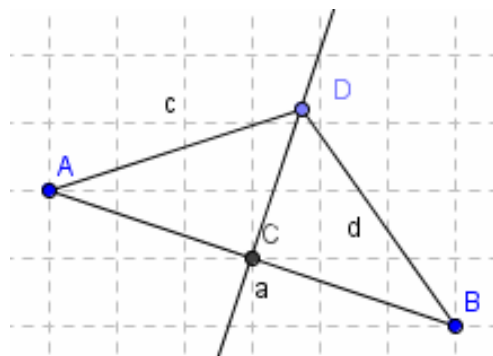


Figura 1. La finestra di Geogebra: a sinistra la finestra Algebra, al centro il foglio da disegno, in basso il campo di inserimento, in alto la Barra dei menu e quella dei comandi(cliccando sulla freccetta in basso a destra di ogni icona si apre un menu a tendina)

2. Attività per la prima classe della secondaria di primo grado

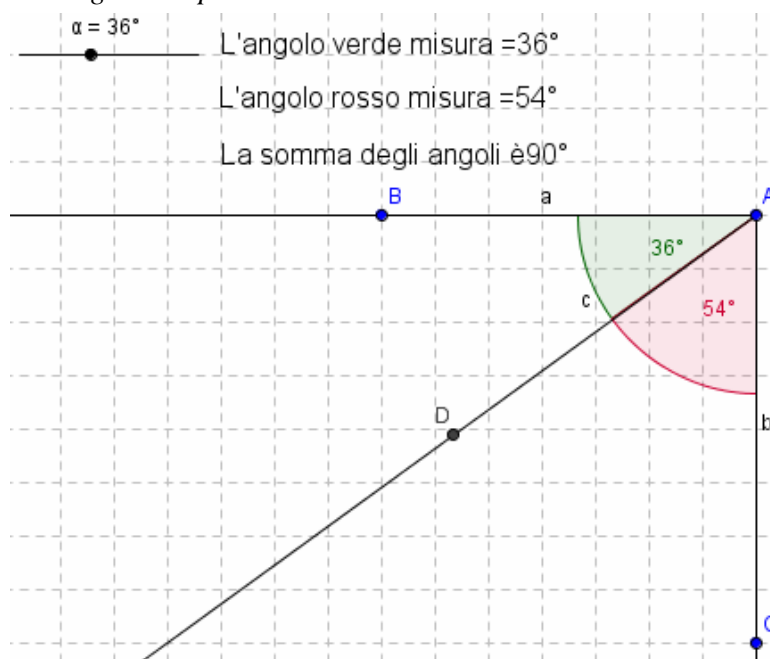
2.1 Asse di un segmento

Dopo aver riportato sugli assi i punti $A(-5;6)$ e $B(7;3)$ scegliere *Ic3 Segmento tra due punti* e tracciare il segmento AB . Trovare quindi il suo punto medio C scegliendo *Ic2 Punto medio o centro* e cliccando sul segmento AB ; tracciare la perpendicolare al segmento AB passante per C , scegliendo *Ic4 Retta perpendicolare* e cliccando sul segmento AB e poi sul punto C , individuando l'asse di AB . Prendere quindi un punto D sull'asse (quando il punto è sulla retta, la retta diventa più scura) e tracciare i segmenti AD e DB . Nella finestra Algebra osservare che i due segmenti hanno la stessa misura e ciò avviene anche spostando D sull'asse. Con lo strumento *Testo*



(*Ic8*) digitare “Segmento $c=$ ” + c e “Segmento $d=$ ” + d , e osservare che i valori dei segmenti c e d rimangono uguali anche spostando D . Cliccare sul punto D e premere il tasto “+” o “-” della tastiera numerica per farlo scorrere sull'asse e osservare l'uguaglianza dei due segmenti nella finestra algebra. Con lo strumento *Testo*, digitare “L'asse di un segmento è la perpendicolare passante per il punto medio del segmento, ma è anche il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento”.

2.2 Angoli complementari



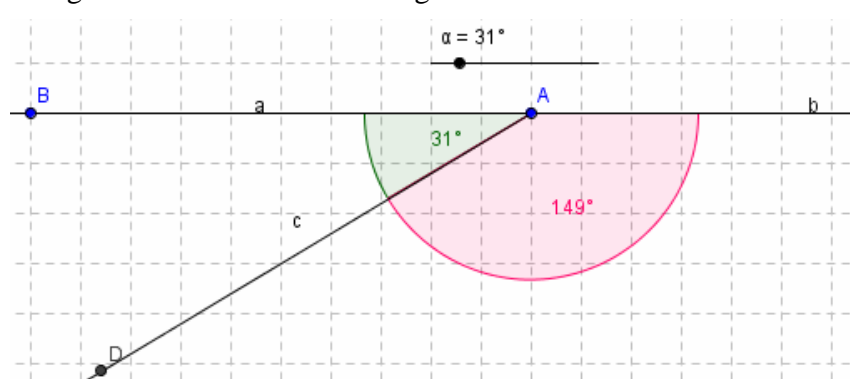
Disegnare la semiretta AB di origine A esattamente orizzontale e la semiretta AC esattamente verticale. Nella riga di Input digitare $\alpha = 30^\circ$ poi con *Ic6 Angolo di data misura* cliccare in B, A e digitare α . Disegnare la semiretta AD poi cliccare sull'angolo β col tasto destro e scegliere Proprietà \rightarrow Dimensione 100, Mostra etichetta \rightarrow Valore e cliccare infine su Applica. Con lo strumento *Ic6 Angolo*, cliccare in DAC poi cliccare col tasto destro sull'angolo γ e scegliere Proprietà \rightarrow Dimensione 100, Mostra etichetta \rightarrow Valore, Colore \rightarrow rosso e cliccare infine su Applica. Nella Finestra Algebra cliccare su $\alpha = 30^\circ$ col tasto destro e scegliere Mostra oggetto; nello slider che si forma cic-

carci col tasto destro e scegliere Proprietà \rightarrow Intervallo max 90° poi cliccare su Applica. Con lo strumento testo digitare:

“L'angolo rosso misura =” + γ “L'angolo verde misura =” + β “la somma degli angoli $\gamma + \beta$ è =” + $(\gamma + \beta)$. Provare a spostare il punto sullo slider.

2.3 Angoli supplementari

Disegnare le semirette AB di origine A esattamente orizzontale ed AC dalla parte opposta. Nella riga di

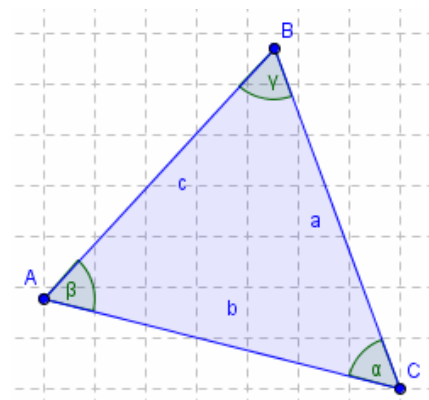


Input digitare $\alpha = 30^\circ$ poi con *Ic6 Angolo di data misura* cliccare in B, A e digitare α . Disegnare la semiretta AD poi cliccare sull'angolo β col tasto destro e scegliere *Proprietà* \rightarrow *Dimensione* 100, *Mostra etichetta* \rightarrow *Valore* e cliccare infine su *Applica*. Con lo strumento *Ic6 Angolo*, cliccare in DAC poi cliccare col tasto destro sull'angolo γ e scegliere *Proprietà* \rightarrow *Dimensione* 100, *Mostra etichetta* \rightarrow *Valore*, *Colore* \rightarrow rosso e cliccare infine su *Applica*. Nella

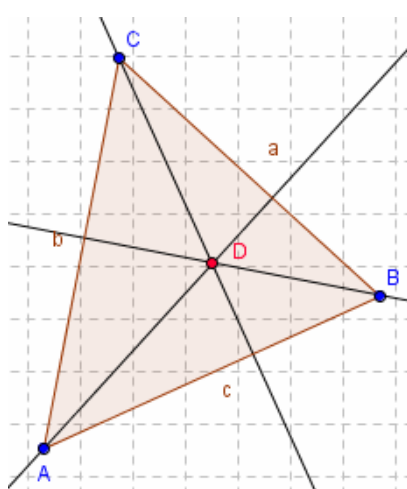
Finestra Algebra cliccare su $\alpha = 30^\circ$ col tasto destro e scegliere *Mostra oggetto*; nello slider che si forma ciccarsi col tasto destro e scegliere *Proprietà* \rightarrow *Intervallo max* 180° poi cliccare su *Applica*. Con lo strumento testo digitare: "L'angolo rosso misura =" + γ "L'angolo verde misura =" + β "la somma degli angoli $\gamma + \beta$ è =" + $(\gamma + \beta)$. Provare a spostare il punto sullo slider.

2.4 Somma degli angoli interni di un triangolo

Disegnare con lo strumento *Poligono* un triangolo a piacere e misurare tutti i suoi angoli ricordando di cliccare sulle coppie di lati seguendo un percorso in senso orario. Con lo strumento *Testo* digitare quindi: "l'angolo α misura " + α , "l'angolo β misura " + β poi "L'angolo γ misura " + γ ed infine "La somma degli angoli interni del triangolo è" + $(\alpha + \beta + \gamma)$. Provare a spostare i vertici del triangolo ed osservare cosa accade alla misura di ciascun angolo ed alla loro somma. Digitare infine: La somma degli angoli interni di un triangolo vale 180° . Formattare il testo colorandolo di rosso a 14 punti.



2.5 Altezze ed ortocentro

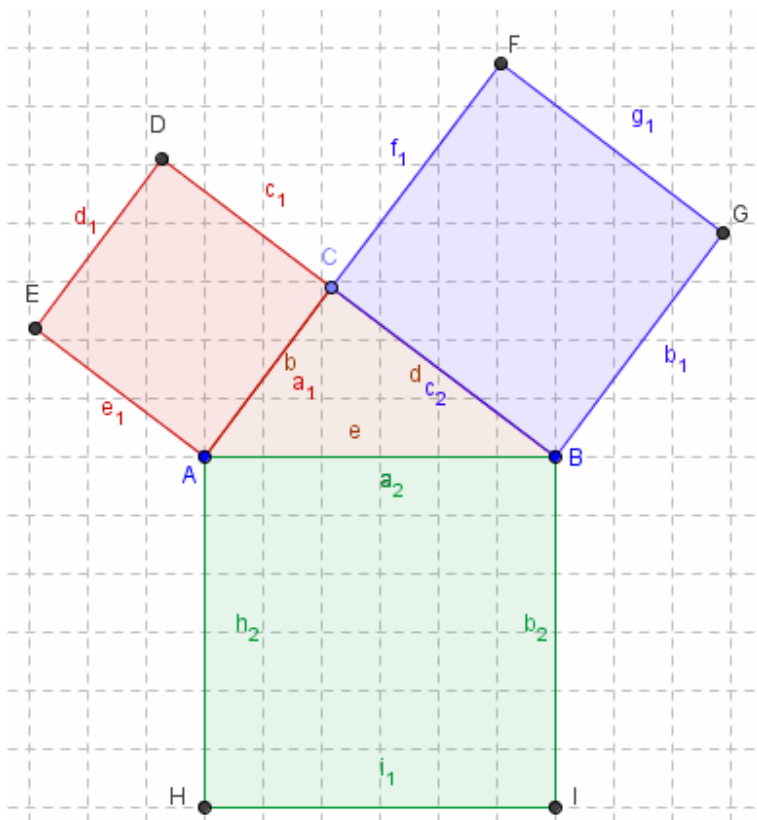


Disegnare un triangolo ABC e tracciare le altezze relative a ciascun lato (perpendicolare ad AB passante per C.....) determinando la loro intersezione D e colorando questo punto di rosso. Cosa accade spostando i vertici del triangolo? In quale caso l'altezza rimane all'interno, su un vertice o all'esterno del triangolo stesso?

3. Attività per la seconda classe

3.1 Teorema di Pitagora

Prendere i punti $A(7,11)$ e $B(14,11)$ e disegnare con lo strumento *Ic5 Semicirconferenza per due punti* la semicirconferenza di diametro AB . Unire A con B con un segmento e disegnare il triangolo ABC con C preso a piacere sulla semicirconferenza. Che tipo di triangolo è ABC ? Nella Finestra Algebra cliccare col tasto destro su a_1 e su c_1 scegliere Rinomina e rinominare a_1 con d e c_1 con e . Dai punti A e C tracciare le perpendicolari al segmento b poi disegnare con *Ic5 Circonferenza di dato centro*, le circonferenze di centro A e passante per C e di centro C e passante per A . Trovare le intersezioni D ed E tra rette e circonferenze, disegnare il quadrato $ACDE$ colorandolo di rosso. Nascondere rette, circonferenze e semicirconferenza. Disegnare il quadrato di lato BC colorandolo di blu (perpendicolari al lato d condotte da B e da C , circonferenze di centro B e passante per C e di centro C e passante per B ... trovare le intersezioni F e G e disegnare il quadrato $CBGF$) e nascondere rette e circonferenze. Ripetere costruendo il quadrato $ABIH$ sul lato e colorandolo di verde. Nascondere rette e circonferenze.



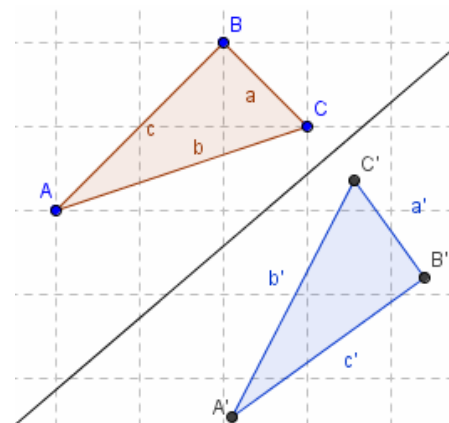
Con lo strumento *Testo* digitare “Area del quadrato $ACDE=$ ” +Q “Area del quadrato $BGFC=$ ” +R “Area del quadrato $ABIH$ ” +S “Somma aree quadrati $ACDE$ e $BGFC=$ ” +(Q +R).

Spostare quindi il punto C , cosa si può osservare?

Aprire il file Pitagora-vettori e ricostruire il quadrato più grande. Aprire i file Dimostrazione Pitagora 1 e Dimostrazione Pitagora 2 e agire sugli slider per dimostrare il teorema.

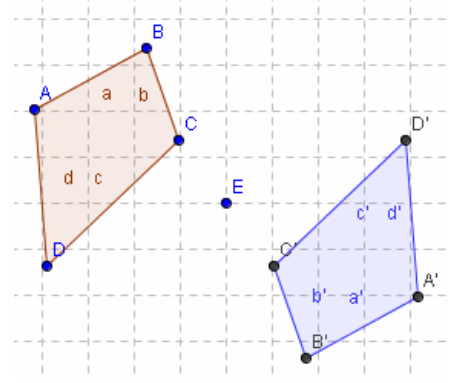
3.2 Simmetria assiale

Tracciare una retta per due punti inclinata a piacere e nella parte superiore disegnare un triangolo ABC . Prendere *Ic7 Simmetrico rispetto ad una retta*, cliccare dentro al triangolo (viene evidenziato ogni suo lato) e poi sulla retta. Cliccare col tasto destro dentro alla simmetrica ottenuta, scegliere Proprietà→colore e cambiare il colore. Provare a spostare i vertici del triangolo ed osservare cosa accade.

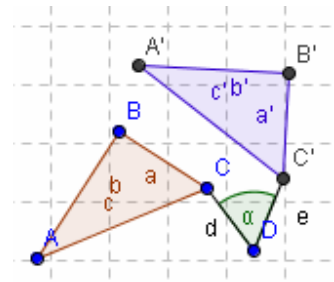


3.3 Simmetria centrale

Dopo aver disegnato un quadrilatero, prendere al suo esterno un punto E, scegliere *Ic7 Simmetrico rispetto ad un punto*, cliccare sul quadrilatero e poi sul punto E. Colorare la figura simmetrica con un colore diverso e provare a spostare i vertici del quadrilatero di partenza. Ripetere l'esercizio disegnando un pentagono e poi un esagono.



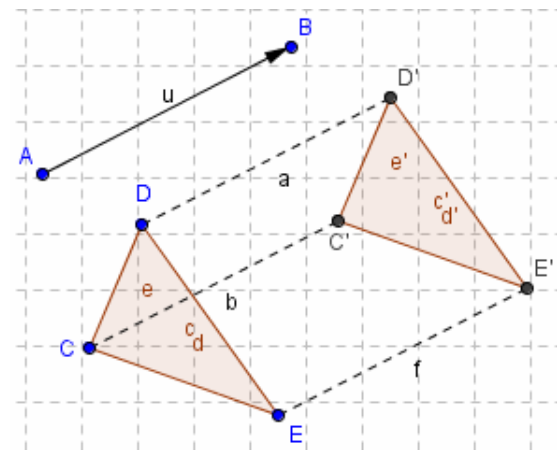
3.4 Rotazione



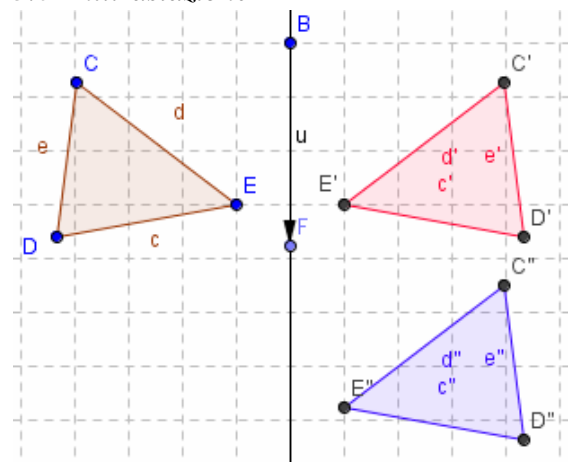
Disegnare un triangolo ABC e prendere un punto D fuori dello stesso, scegliere *Ic7 Ruota intorno ad un punto di un angolo*, cliccare sul triangolo e poi sul punto E e nella finestra che si apre digitare il valore dell'angolo di rotazione, scegliendo anche il verso della rotazione (Orario o Antiorario). Colorare il triangolo ottenuto con un colore diverso da quello iniziale. Ripetere disegnando e ruotando di un certo numero di gradi a piacere, in senso orario o antiorario, un quadrilatero, un pentagono ed un esagono.

3.5 Traslazione

Prendere due punti A e B ed unirli con *Ic3 Vettore tra due punti*, cliccando in A e poi in B. Disegnare quindi un triangolo e scegliere *Ic7 Trasla di un vettore*, cliccare dentro al triangolo e poi sul vettore. Colorare il triangolo ottenuto di un colore diverso, unire i vertici corrispondenti con un segmento, cliccare su ciascuno di essi col tasto destro e scegliere *Proprietà* → *Stile tratto* → *Tratteggiato* osservare poi il loro parallelismo. Provare a spostare il vertice B del vettore, poi ripetere l'esercizio disegnando un quadrilatero, un pentagono ed un esagono.



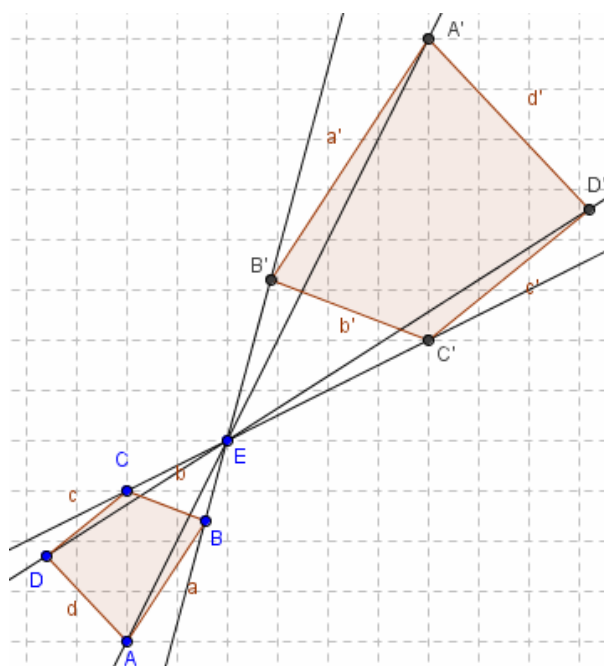
3.6 Antitraslazione



Disegnare una retta parallela all'asse y e disegnare un triangolo DEC a piacere. Sulla retta prendere un punto F e tracciare il vettore BF. Disegnare quindi il simmetrico del triangolo rispetto alla retta colorandolo di colore rosso. Traslare quindi il triangolo ottenuto del vettore disegnato, colorando di blu. Provare quindi a spostare i vertici del triangolo e poi il vettore (anche sopra al punto B).

3.7 Omotetia

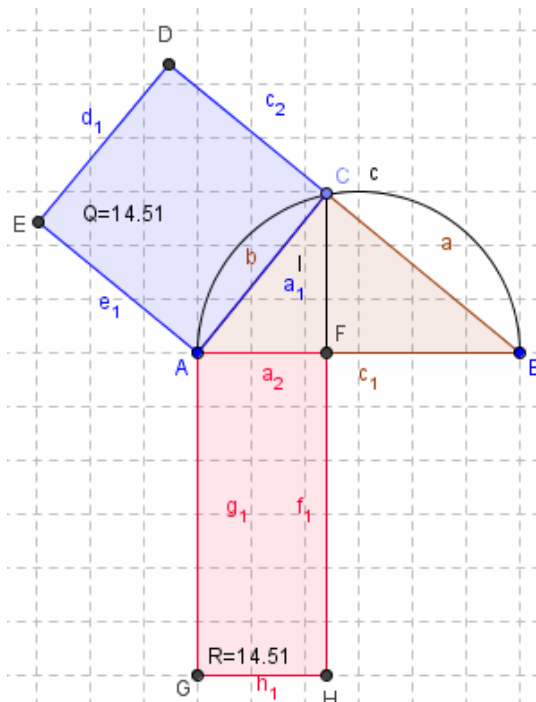
Disegnare un triangolo a piacere con lo strumento *Poligono* e prendere un punto D esterno ad esso. *Ic7 Dilata oggetto da un punto di un fattore*, cliccare sul triangolo, sul punto D e nella finestra che si apre digitare 2. Tracciare le rette che passano il punto D e per ciascun vertice del triangolo, poi provare a spostare il punto D. Ripetere disegnando un quadrilatero e poi un pentagono a piacere. Disegnare un triangolo ed un punto D esterno ad esso. Procedere come in precedenza, ma stavolta nella finestra che si apre digitiamo il valore -2 (si ottiene l'omotetia inversa). Provare con un quadrilatero ed un pentagono.



4. Attività per la classe terza

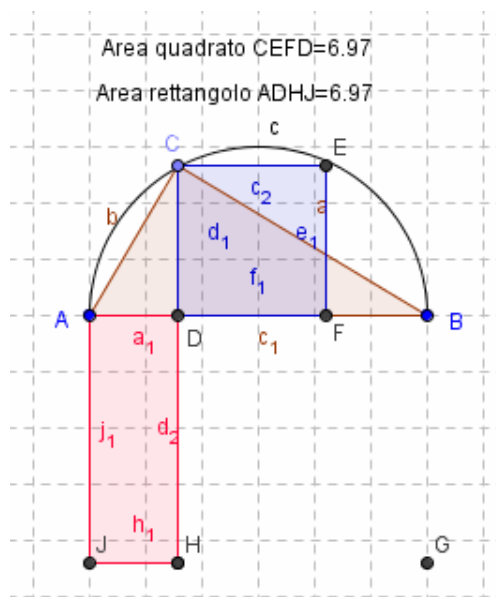
4.1 Primo teorema di Euclide

Con lo strumento *Ic5 semicirconfenza per due punti*, disegnare una semicirconfenza ed unire i punti A e B con un segmento. Individuare sulla semicirconfenza un punto C e tracciare il triangolo ABC (rettangolo perché inscritto in una semicirconfenza). Tracciare le perpendicolari al segmento AC per A e per C poi prendere Circonfenza di dato centro e disegnare le circonferenze di centro A e raggio AC e centro C e raggio CA, individuando le intersezioni D ed E con le rette precedenti. Tracciare il quadrato ACDE e colorarlo con colore diverso dal triangolo. Nascondere le due circonferenze. Tracciare la perpendicolare al segmento AB condotta da C individuando l'intersezione F e la perpendicolare ad AB condotta da A. Disegnare la circonferenza di centro A e raggio e AB individuando l'intersezione G tra circonferenza e perpendicolare ad AB per A. Da G tracciare la perpendicolare alla retta passante per G e individuare il punto H intersezione della retta passante per G e per CF. Disegnare il rettangolo AFHG e colorarlo diversamente dagli altri. Tracciare il segmento CF e nascondere rette e circonferenze. Digitare con lo strumento *Testo* "Q =" +Q + "cm²" e "R =" +R + "cm²" riportando i valori ottenuti dentro alle rispettive figure, poi cliccando su questi valori col tasto destro scegliere proprietà → Punto iniziale → legarlo ad una delle lettere di un vertice. Nascondere tutte le rette e le circonferenze e provare quindi a spostare il punto C.



4.2 Secondo teorema di Euclide

Con lo strumento *Ic5 semicirconferenza per due punti*, disegnare una semicirconferenza passante per A e per B. Individuare sulla semicirconferenza un punto C e tracciare il triangolo ABC. Disegnare la perpendicolare al segmento AB passante per C individuando il punto d'incontro D. Tracciare la perpendicolare per C al segmento CD e la parallela a quest'ultima per B. Disegnare la circonferenza di centro C e raggio D e la circonferenza di centro D e raggio C individuando le intersezioni F ed E con le due rette disegnate. Disegnare il quadrato CEFD colorandolo di blu (poligono Q) e nascondere le circonferenze. Tracciare la perpendicolare da B ad AB e disegnare le circonferenze di centro B e raggio BD e di centro D e raggio DB individuando le intersezioni G ed H. Dal punto A tracciare la perpendicolare ad AB, e la retta GH e individuare l'intersezione J con la retta precedente (perpendicolare per A ad AB). Tracciare il rettangolo ADHJ e colorarlo in modo diverso. Nascondere circonferenze e rette, quindi digitare con lo strumento *Testo* "Area quadrato Q =" + Q + "cm²" e "Area rettangolo S =" + S + "cm²". Come sono le due aree? Cosa accade spostando il punto C?



Area quadrato Q = " + Q + "cm²" e "Area rettangolo S =" + S + "cm²". Come sono le due aree? Cosa accade spostando il punto C?

4.3 La retta

Inserire nella riga di input:

a=1 e dare Invio

b=1 e dare Invio

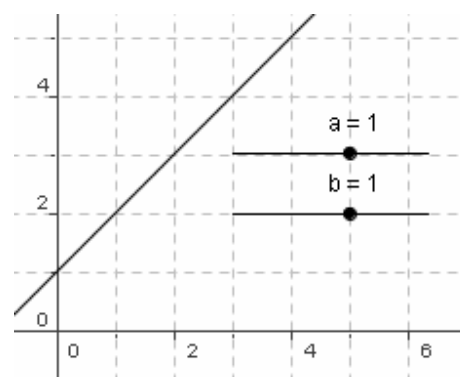
a*x+b e dare Invio

Si ottiene la funzione che ha per rappresentazione grafica la retta $y=x+1$. Tale retta taglia l'asse delle y nel punto +1 (ordinata all'origine).

Proviamo a cambiare tale valore realizzando uno slider:

cliccare in b=1, nella Finestra Algebra, col tasto destro e scegliere Mostra oggetto. Cliccare col tasto destro sullo slider e scegliere Proprietà inserendo i valori -10 e 10 in Intervallo e 1 in Incremento.

Possiamo osservare che quando b aumenta, la retta taglia l'asse y nel punto corrispondente al valore sullo slider, nel semiasse positivo delle y. Quando invece b diminuisce e arriva a 0, la retta passa per l'origine degli assi, mentre quando i valori diventano negativi, viene tagliato l'asse y nel suo semiasse negativo (fino a -10).



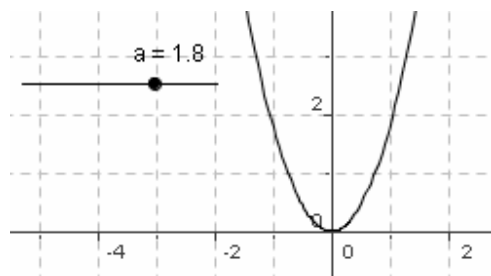
4.4 La parabola

Inserire nella riga di input:

a=1 e dare Invio

$y=a*x^2$ e dare Invio

Realizzare con il valore a uno slider (Intervallo da -10 a 10 Incremento 1). Aumentando il valore di a la parabola si avvicina all'asse delle y, quando a=0 si ottiene la retta $y=0$ (asse delle x) mentre con $a < 0$ la parabola cambia concavità (guarda verso il basso) e si sposta nel 3° e 4° quadrante.



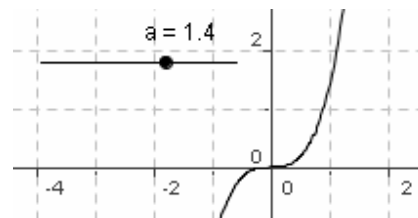
4.5 Una cubica

Inserire nella riga di input:

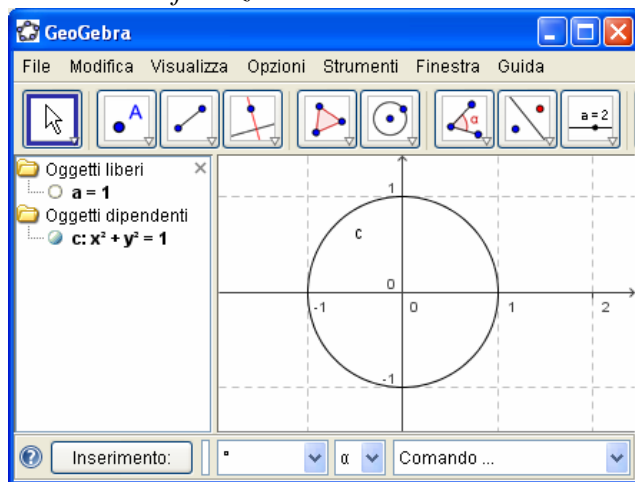
$a=1$ e dare Invio

$f(x)=a*x^3$

Realizzare uno slider (Intervallo da -10 a 10 Incremento 1); dando alla a valori positivi crescenti la parabola si avvicina all'asse delle y , quando $a = 0$ si ottiene la retta $x = 0$, quando la a assume valori negativi il disegno della si sposta nel 2° e 4° quadrante.



4.6 La circonferenza



Inserire nella riga di input:

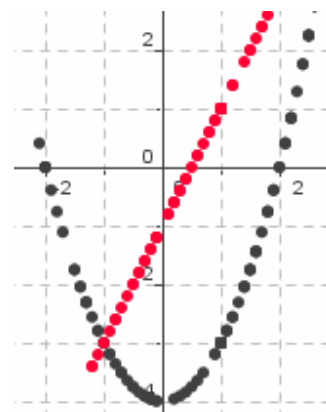
$a=1$

$x^2 + y^2 = a^2$

Realizzare uno slider (Intervallo da 1 a 10 Incremento 1). Aumentando il valore della a le circonferenze, con centro nell'origine, aumentano di raggio.

4.7 Uso di due funzioni e due slider

Le funzioni da utilizzare sono $y=x^2-4$ e $y= x-1$. Digitare nella riga di input $t=1$ e dare Invio. Digitare quindi $C=(t, t^2-4)$. Creare con $t=1$ uno slider regolando l'intervallo tra -10 e 10 e l'incremento di 0,1. Cliccare col tasto destro sul punto C e selezionare Traccia on. Digitare nella riga di input $s=1$ e poi $D=(s, s-1)$ e creare con s uno slider con le caratteristiche precedenti. Cliccare col tasto destro sul punto D e selezionare Traccia on, cambiando inoltre il colore della retta. Muovere l'uno e l'altro slider e osservare cosa si ottiene (intersezioni tra retta e parabola).



Sitografia

- [1] www.geogebra.org/cms/
- [2] <http://www.math.fau.edu/~mhohen/>
- [3] <http://www.geogebra.org/forum/>
- [4] <http://home.windstream.net/joelkahn/>
- [5] http://www.vivante.it/PinP/Italian_postcards.html