66.Teoria fisica dei campi vettoriali ed equazioni differenziali

di Paolo Bonicatto [sbonica@tin.it]

[...] perché imparare è la cosa più dolce
non solo per i saggi
ma anche per tutti gli altri ugualmente.

Aristotele

Sunto: *Lo scopo di queste pagine è quello di illustrare, in maniera sintetica e per quanto possibile esaustiva, lo stretto legame che intercorre tra campi vettoriali ed equazioni differenziali. Dopo una breve introduzione che mette in luce l'importanza che la teoria dei campi riveste nello studio della Fisica Classica, è presente un paragrafo dedicato alla definizione matematica di campo vettoriale. Infine, le ultime pagine sono dedicate all'utilizzo dei campi nella costruzione e soprattutto nella risoluzione di modelli differenziali.*

L'evoluzione del concetto fisico di campo

Fin dall'antichità si pensava che le forze si originassero in seguito ad un *contatto*. Anche ai tempi di Newton, il concetto di forza era istintivamente associato ad una spinta o, al massimo, ad un urto. Tuttavia, si rivelò necessario modificare questa impostazione di pensiero quando si intrapresero i primi studi sulla gravitazione universale: due corpi interagivano senza che vi fosse necessariamente un contatto tra di loro. E' grazie a fisici del calibro di Faraday e Maxwell che, agli inizi del 1800, nacque il concetto di *campo*. In Fisica, esso si potrebbe definire come una "perturbazione dello spazio, descritta da grandezze fisiche misurabili" [1]. E infatti, generalmente, un corpo posizionato in un punto nello spazio risente del campo presente in quel punto, in quel dato istante.

Il campo gravitazionale

Nello studio della Fisica Classica, si incontra il concetto di *campo* diverse volte. Qui e nel seguito ci limiteremo a considerare il campo *gravitazionale* e quello *elettrico*. Prima di darne una rigorosa definizione in termini fisici, cerchiamo di illustrare il concetto mediante un esempio. Consideriamo la Terra come una massa isolata. Se un corpo è portato vicino ad essa, risente di una forza **F** che ha direzione, verso e modulo definiti in ogni punto dello spazio. Più precisamente, l'intensità è **m·g** mentre la direzione è quella del raggio (e quindi sarà detta *radiale*) rivolta verso il centro della Terra. In ogni punto dello spazio, possiamo dunque definire un vettore **g** che corrisponde all'accelerazione a cui il corpo verrebbe sottoposto se venisse lasciato libero. Dalla seconda legge della dinamica si può ricavare l'intensità di **g**, che è data da

$$\mathbf{g} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}.$$

Abbiamo già detto che un campo gravitazionale è una *perturbazione* dello spazio. Precisiamo ora che è una grandezza vettoriale, la cui intensità è data da

$$\Gamma = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}$$

(è cioè la forza per unità di massa) ed è sempre rivolto radialmente verso il centro della massa che l'ha prodotto. Si noti che il campo gravitazionale ha le dimensioni di un'accelerazione: la sua equazione dimensionale è$[l][t]^{-2}$ e la sua unità di misura m/s^2 – come si poteva dedurre dall'esempio precedente. Un campo gravitazionale può essere rappresentato mediante linee di forza (vedi fig. 1).

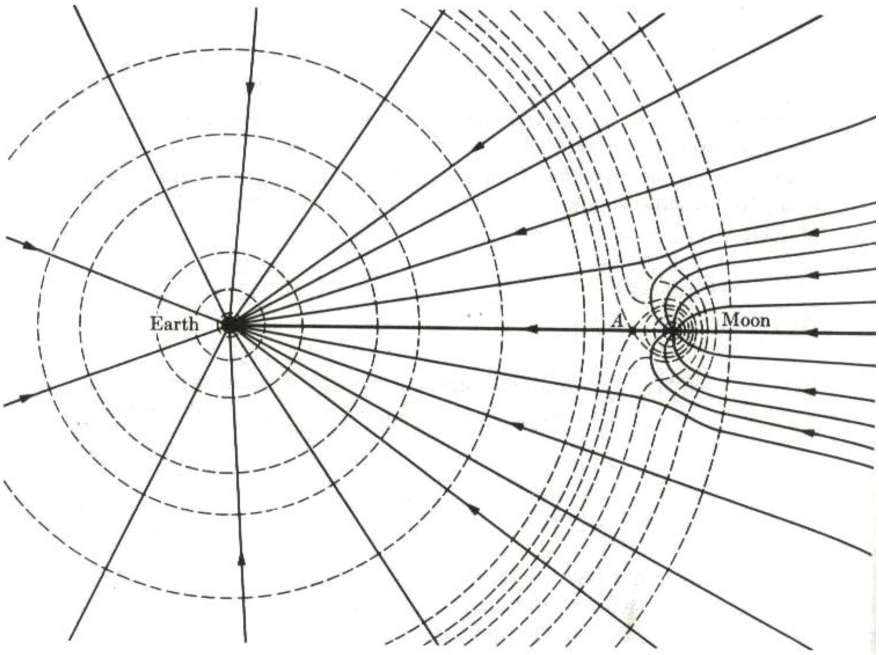

Figura 1. Linee di forza del campo gravitazionale prodotto dalla Terra e dalla Luna.
Fonte: Alonso-Finn, Physics, Pretince Hall, 1992.

Campo elettrico

Si incontra un altro esempio di campo vettoriale nello studio delle interazioni elettriche. E' risaputo che molte sono le somiglianze tra la teoria gravitazionale e quella elettrica (si considerino, ad esempio, la legge newtoniana e quella coulombiana); analogamente a quello gravitazione, il *campo elettrico* è definito dal rapporto:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (1)$$

dove **F** è la forza olombiana esercitata sulla carica e q è detta carica di *prova*. Possiamo inoltre affermare che un *campo elettrico* è una qualsiasi regione in cui una carica elettrica esercita una forza; in altre parole, esso è la forza per unità di carica e pertanto ha unità di misura N/C (newton/coulomb).
Si noti che la (1) si può scrivere anche come

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}\,.$$

Va detto che, al contrario della massa, una carica può assumere valore negativo. Restano quindi da distinguere due casi: una carica positiva risente di una forza nella stessa direzione e verso di **E**; una carica negativa risente di una forza con stessa direzione ma verso opposto ad **E**. Anche per quanto riguarda la rappresentazione mediante linee di forza è opportuna qualche precisazione. Esse partono sempre dalle cariche positive (+) o dall'infinito e finiscono nelle cariche negative (–) o all'infinito. Ovviamente la loro densità aumenta con l'intensità di **E**. Un esempio classico di campo elettrico (peraltro uniforme, visto che il campo punta in una sola direzione e la sua intensità è indipendente dalla distanza dello stesso) è un condensatore (cfr. fig. 2)

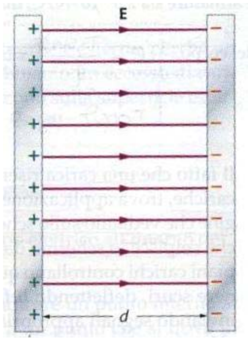

Figura 2. Condensatore a facce piane e parallele. In questo caso ideale il campo elettrico è uniforme fra le due armature e nullo all'esterno.
Fonte: Walker Fisica ed. Zanichelli [2004]

Teoria matematica di un campo vettoriale

Il concetto di campo, come si è appena visto, è ricorrente in Fisica. Nei paragrafi che seguono ci occuperemo invece di analizzare un campo vettoriale da un punto di vista strettamente matematico: riprenderemo alcuni concetti dell'Analisi per studiarne le caratteristiche e, infine, cercheremo di mettere in luce lo stretto rapporto fra campi vettoriali ed equazioni differenziali.

Cominciamo con qualche definizione: in Matematica, per campo vettoriale (su uno spazio euclideo) si intende una particolare costruzione che associa a ogni punto di una regione (dello spazio euclideo) un vettore dello spazio stesso.

Esso viene univocamente identificato attraverso le sue componenti, funzioni a valori scalari che individuano ogni vettore nello spazio. Dal momento che una definizione del genere potrebbe risultare piuttosto oscura, facciamo subito un esempio in grado di "illuminare" il lettore. Supponiamo di avere il campo vettoriale (su $\mathbb{R}^2$) di componenti $\{2x+3y, 1-y+e^{-x}\}$. Questo significa che ad ogni punto $\{x, y\}$ bisogna 'appiccicare' il vettore di componenti $\{2x+3y, 1-y+e^{-x}\}$. Proviamo a disegnarlo con l'aiuto del software Mathematica®. Otteniamo, all'interno del quadrato $\{0,5\}\times\{0,5\}$, qualcosa di simile a questo:

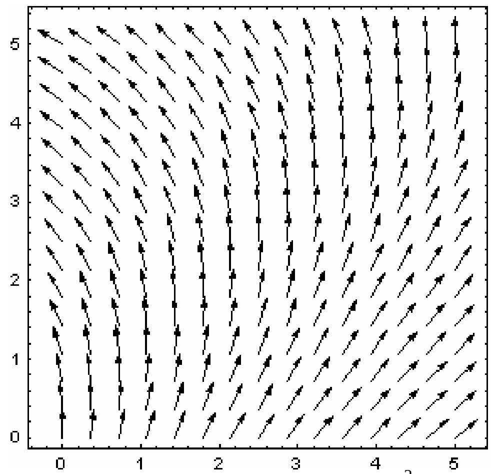

Figura 3. Rappresentazione di un campo vettoriale su R^2 di componenti assegnate.

Ovviamente, appare quasi ovvia l'estensione a R^3. Disegniamo il campo $\left\{\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, 0\right\}$:

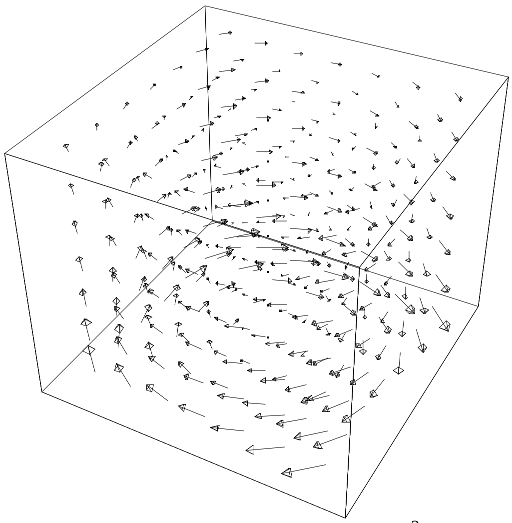

Figura 4. Rappresentazione di un campo vettoriale su R^3 di componenti assegnate.

Cercando di riunire le idee, possiamo dire che un campo vettoriale è definito dalle sue componenti, che, nel caso in cui $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, vengono generalmente indicate come $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ (ovviamente l'estensione a R^3 implica componenti $f_x(x,y,z),\, f_y(x,y,z),\, f_z(x,y,z)$).

Per visualizzare un campo, inoltre, si devono identificare dominio e codominio, avendo l'accortezza di pensare il dominio come insieme di punti e il codominio come insieme di vettori.

Chiudiamo il paragrafo, con un'osservazione non banale: nonostante la nomenclatura sia piuttosto simile, campo vettoriale e spazio vettoriale – come il lettore avrà avuto modo di notare – hanno ben poco in comune. Attenzione, dunque, a non confondere i due concetti.

Analisi differenziale di un campo

Cerchiamo ora di mettere in luce il legame con le equazioni differenziali. Riteniamo opportuno ricordare, prima di passare alla trattazione vera e propria, il cosiddetto significato geometrico della derivata. Data una funzione f(x) derivabile (in un intervallo I), la sua derivata f'(x_0) nel punto x_0 (interno ad I) rappresenta il coefficiente angolare (o, secondo una terminologia meno appropriata, la pendenza) della retta tangente alla curva in quel punto.

Non è molto difficile, quindi, individuare quel legame tra campi vettoriali ed equazioni differenziali di cui si parlava: infatti, la ricerca di curve tracciate nel piano che in ogni punto siano tangenti al vettore del campo dato si traduce nella risoluzione di un'equazione differenziale; l'integrale di tale equazione, se c'è, si dice anche curva integrale del campo assegnato. In altre parole, si può associare ad un'equazione differenziale un campo vettoriale: questo permette di visualizzare graficamente l'andamento delle curve integrali dell'equazione. Prendiamo, ad esempio, una equazione nella forma

$$y' = f(x,y).$$

Ora, si consideri un generico integrale y(x) di quest'equazione differenziale. E' possibile associare ad esso una curva parametrica in R^2; poniamo

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y(x(t)) \end{cases}$$

Il vettore tangente – ecco che entrano in gioco i campi – in ogni punto di questa curva è dato dalle due derivate, cioè

$$(x'(t), y'(t)) = (1, f(x,y)).$$

Quindi, data un'equazione differenziale come quella sopra è possibile associarvi un campo vettoriale. Prendiamo, ad esempio, un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\frac{dy}{dx} - x + y(x) = 0.$$

Possiamo riscriverla come

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = x - y \\ &y' = x - y \end{aligned} \tag{2}$$

La (2) ci dice che in ogni punto (x_0, y_0) la derivata vale

$$y_0' = x_0 - y_0$$

Il coefficiente angolare della curva in ogni punto è pari alla differenza dell'ascissa e dell'ordinata del punto stesso. Secondo quanto abbiamo detto precedentemente, alla generica equazione $y' = f(x,y)$ associamo il campo $(1, f(x,y))$; nel nostro caso, $f(x,y) = x - y$ e quindi possiamo associare all'equazione il campo di componenti $\{1, x-y\}$. Nella figura 5 si può vedere graficamente cosa succede all'interno del quadrato {-5,5} × {-5,5}:

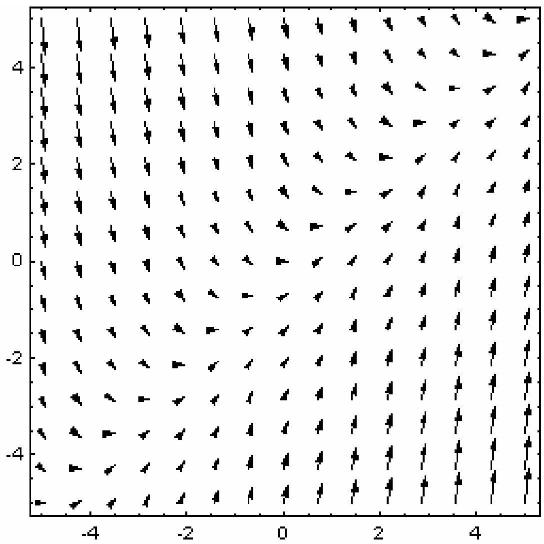

Figura 5. Rappresentazione del campo associato all'equazione differenziale.

E' interessante, a questo punto, integrare l'equazione data per poter 'vedere' di fatto il legame tra campi ed equazioni differenziali. Procediamo come di consueto e usiamo la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{aligned} &y' = x - y \\ &y = e^{-\int dx}\left[\int xe^{\int dx}dx + c\right] \\ &y = e^{-x}\left[\int xe^{x}dx + c\right] \end{aligned}$$

L'integrale non è immediato però si può integrare per parti, e si ottiene

$$y = e^{-x}\left[e^{x}(x+1)+c\right]$$

$$y = e^{-x+x}(x+1)+ce^{-x}$$

$$y = x+1+ce^{-x}$$

Questa è l'espressione dell'integrale generale. Se si prova a tracciare il grafico di alcuni integrali particolari (assegnando diversi valori a c), si vede che essi sono sovrapponibili in tutto e per tutto alle direzioni individuate dai vettori della figura 5; non solo, ma dall'analisi di figura 5 si poteva già indovinare l'integrale particolare $y = x+1$ (ottenuto ponendo c=0) dal momento che le direzioni erano tutte allineate. Emerge così anche l'utilità dei campi in ambito integro-differenziale: essi permettono di apprezzare il comportamento delle soluzioni, anche nel caso in cui l'equazione non ammetta soluzioni esplicitabili elementarmente.

Lo scenario che si spalanca di fronte a noi è ora immenso, forse troppo esteso per essere esaurito in queste poche pagine: la teoria di alcuni importanti operatori del calcolo vettoriale (rotore, divergenza e gradiente), che vengono utilizzati nella creazione di campi vettoriali particolari, è un argomento molto interessante. Invitiamo il lettore curioso che abbia voglia di approfondire di consultare la sezione bibliografica.

Bibliografia

Nella stesura ho tenuto conto delle seguenti opere (in ordine crescente di apprezzamento da parte mia):
1. A. Caforio – A. Ferilli, *Fisica 1*, Le Monnier, 2004
2. J.S. Walzer, *Fisica*, Zanichelli, 2001
3. D. Halliday – R. Resnick, *Fisica, Volume primo,* Casa ed. Ambrosiana, 1966
4. M. Alonso – E. J. Finn, *Fundamental University Physics: Fields and Waves,* Inter European Editions Amsterdam, 1974 (edizione bilingue); ora *Physics,* ed. Prentice Hall, 1992
5. Elsgolts, Lev Ernestovic, *Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni : corso di matematica superiore e di fisica matematica*, Roma: Editori riuniti; Mosca: Mir, 1981. Trad. di Boris Dmitriev

Per quanto riguarda la sezione di Matematica, invito il lettore interessato ad eventuali approfondimenti a consultare l'indispensabile Wikipedia (www.en.wikipedia.org). Infine, porgo i miei più sentiti ringraziamenti al dott. L. A. Lussardi e all'utente "Eredir" del forum di matematicamente.it: il loro aiuto è stato per me determinante nella comprensione di questo argomento.