65. Matematica tra le pieghe

di Lucia Gecchelin

Sunto: *Esiste un rapporto fecondo che lega la matematica all'origami, l'arte di piegare la carta. Numerosi modelli origami rappresentano oggetti geometrici significativi e delle teorie matematiche aiutano a progettare nuovi e particolari modelli. In queste pagine vogliamo esplorare qualche aspetto di questo legame, per stuzzicare la curiosità sulla matematica che può essere affrontata da un punto di vista originale grazie all'origami. Descriveremo le pieghe, osserveremo la piega a "orecchio di coniglio" e riporteremo dei risultati sui* crease pattern. *Parleremo di quadrato e rettangoli nell'origami. Seguirà un breve confronto tra costruzioni con riga e compasso e "assiomi" origami.*

Introduzione

La parola di origine giapponese ORIGAMI, composta dai due ideogrammi 折 *ori* piegare e 紙 *kami* carta, indica sia l'attività del piegare la carta per ottenere figure di qualunque forma, sia l'oggetto piegato. Le regole indicano che a partire da uno o più fogli di carta quadrati, o di forma convessa, si ottenga l'oggetto con il *solo uso della piegatura*, senza incollare e senza mai tagliare. Il gioco sta nello scoprire le possibilità racchiuse in un foglio di carta! Da qui, il piegare la carta diventa arte, sfida, forma di meditazione,…

Le prime proprietà matematiche che si osservano in un modello origami sono geometriche. In diversi modi si possono esplorare le connessioni tra la geometria e la piegatura della carta. Possiamo piegare numerosi modelli che rappresentano esplicitamente oggetti geometrici significativi ma si scopre anche che l'origami permette di affrontare in maniera semplice altri concetti matematici non banali o, viceversa, che ci possiamo servire di teorie matematiche per progettare nuovi e particolari modelli. Per esempio, quando vogliamo trasformare un foglio quadrato in un animale, in un fiore, in un elemento del paesaggio, in una figura umana o in un oggetto astratto, per ciascun elemento caratteristico di questi soggetti dobbiamo utilizzare le parti del foglio per ricavarne delle punte. Il modello finale sarà tanto più piacevole quanta più carta sarà utilizzata in maniera efficiente. Simmetria, equilibrio e proporzioni, diventano così parametri estetici che si possono ricondurre al criterio matematico dell'*ottimizzazione* nell'uso della carta [B1].

I legami tra origami e matematica sono numerosi e affascinanti e vanno insospettabilmente al di là delle relazioni geometriche tra parti del foglio durante la piegatura. Questi legami possono essere raggruppati in tre ambiti [S1], non necessariamente scollegati tra loro:

- *Matematica dell'origami* è la matematica che descrive le leggi soggiacenti all'origami;
- *Origami computazionale* è l'insieme degli algoritmi e della teoria rivolti alla soluzione di problemi origami, attraverso la matematica;
- *Tecnologia origami* è l'applicazione della piegatura per risolvere problemi che sorgono in ingegneria, nel disegno industriale e nella tecnologia in generale (air bag, lenti di telescopi, bicchieri, piegatura delle carte geografiche, ...).

Origamisti, matematici, insegnanti e altri scienziati di tutto il mondo si occupano sempre di più di queste relazioni e vi dedicano anche convegni internazionali. Il primo si è tenuto in Italia, a Ferrara nel 1989, "*The First International Meeting of Origami Science and Technology*" grazie al fisico italo giapponese Humiaki Huzita. Nel 1994 a Otsu in Giappone si è tenuto "*The Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*". Sono seguiti "*The Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education*" nel 2001 ad Asilomar, in California e "T*he Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*" nel 2006 a Pasadena in California.

Le pieghe

Il matematico origamista si trova in un curioso ambiente, con in mano un foglio di carta potrà trasformarlo solo grazie a pieghe successive. Possiamo dire che la piega sia per lui l'ente fondamentale; allora analizziamola come farebbe questo curioso matematico. Ci sono *due* tipi di pieghe: la piega *a monte* e la piega *a valle*. Se il foglio è bianco da entrambe le parti e non vi sono altre pieghe di riferimento, una piega a monte diventa a valle se capovolgiamo il foglio: c'è *un solo* tipo di piega (vedi figura 1).

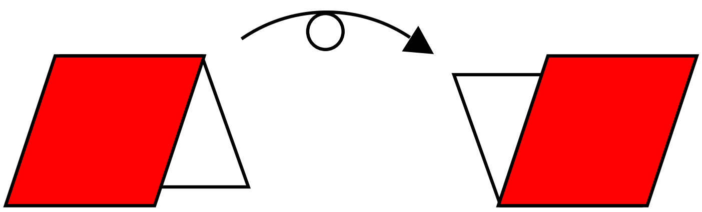


Figura 1. Piega a monte e piega a valle

Se seguiamo le regole alla lettera, per creare un origami non useremo altri strumenti oltre al foglio e alla piegatura, allora anche per trovare punti significativi di riferimento per altre pieghe saranno necessarie delle pieghe. In genere, queste si eseguono, poi si riapre il foglio e si usa qualcuna delle tracce. Allora ci sono *tre* tipi di pieghe: piega a monte, piega a valle e la traccia di una piega. Osserviamo ancora che piega a monte, piega a valle e traccia di una piega sono anche parte di *un continuum* di un angolo piegato. Infatti, una piega a valle non è sempre uguale a un'altra piega a valle, se gli strati di carta non risultano in un modello piatto. Piegando il modello si sfruttano le tre dimensioni dello spazio, le pieghe non sono necessariamente piatte e possono variare a seconda dell'angolo formato dalle due parti in cui dividono il foglio. Formalizzando un po', possiamo scrivere

$$0 \le \text{piega a valle} < 180°$$

$$180° = \text{traccia di una piega}$$

$$180° < \text{piega a monte} \le 360°.$$

Sequenze di pieghe a monte e a valle che si usano frequentemente nell'origami hanno dei nomi propri; alcune sono dette *pieghe* e altre *basi*, perché a partire da esse si creano numerosi modelli le cui caratteristiche si possono già riconoscere nella loro struttura.

Una piega interessante è la *piega a orecchio di coniglio* (figura 2).

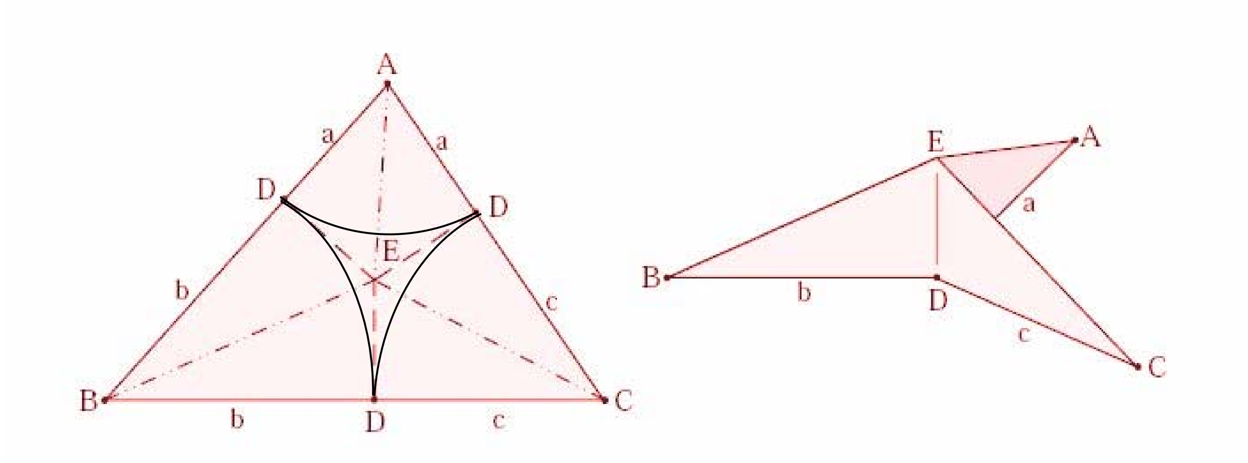


Figura 2. Piega a orecchio di coniglio

Essa si esegue in una porzione triangolare del foglio, piegando a monte lungo le bisettrici del triangolo e concludendo con delle pieghe a valle perpendicolari ai lati in modo che il triangolo piegato sia un *origami piatto*, ossia giaccia tutto su un piano. Osserviamo che, in una qualunque piega a orecchio di coniglio, i lati del triangolo sono tutti allineati e i punti di tangenza degli archi di circonferenza centrati nei vertici del triangolo appartengono alla stessa retta di allineamento e sono coincidenti. La struttura geometrica che soggiace alla piega a orecchio era nota a Euclide, che dimostrò che le *bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto* e che i *triangoli adiacenti* formati da segmenti di bisettrici con vertici il centro e un vertice del triangolo sono *congruenti*. Per provare a piegare qualcosa, un semplice origami che utilizza la piega a orecchio di coniglio, dando vita a un modello di movimento, è il "Wing ding" di Florence Temko nel sito [S7].

Se pieghiamo un origami e riapriamo completamente il foglio, vedremo il *crease pattern* cioè l'insieme delle tracce delle pieghe. Il *crease pattern* fornisce molte informazioni sulla struttura dell'origami e dà una visione d'insieme dell'intero modello; diversamente dal carattere locale delle osservazioni che si possono fare analizzando i "diagrammi", cioè l'insieme dei disegni che illustrano la sequenza di piegatura che conduce al modello finito passo dopo passo. Tipicamente le prime pagine dei libri dedicati agli origami descrivono i simboli utilizzati nei diagrammi per indicare i diversi tipi di pieghe, poi passano a descrivere le sequenze di pieghe usate più frequentemente, dette "basi". Quattro basi classiche si chiamano "base dell'aquilone", "base del pesce", "base della gru", "base della rana" e sono illustrate in ordine nella figura 3.

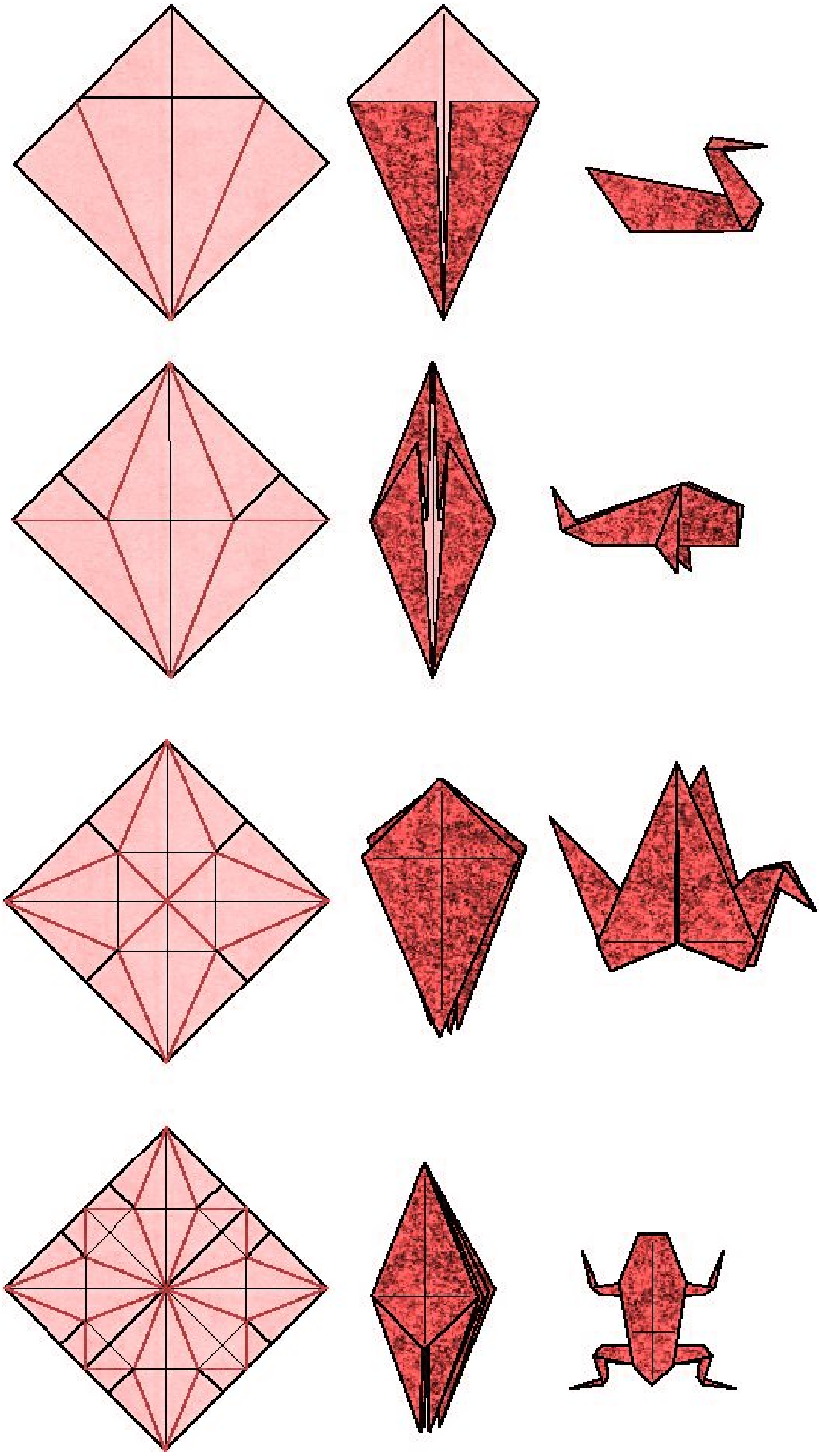


Figura 3. Le quattro basi classiche dell'origami: “base dell’aquilone”, “base del pesce”, “base della gru”, “base della rana”.

Confrontando i *crease pattern* delle quattro basi classiche, si nota che esse sono costituite del medesimo tassello ripetuto da due a sedici volte. Lo riconoscete?

Il matematico origamista si chiederà, dato un foglio di carta e un insieme di linee disegnate su di esso, se questo insieme costituisca il *crease pattern* per un modello origami. Il problema è stato affrontato e si è rivelato assai difficile e in generale senza soluzione. Alcuni risultati *locali* si sono ottenuti per gli origami piatti. Si dimostrano condizioni necessarie e sufficienti sulle pieghe che convergono in un vertice di un origami piatto. In particolare si hanno i seguenti

Teorema di Maekawa-Justin
Attorno a un vertice interno a un *crease pattern* di un origami piatto deve essere

$$M - V = +2 \text{ o } M - V = -2$$

Dove M è l'insieme delle pieghe a monte e V è l'insieme delle pieghe a valle.

Corollario
Il numero di pieghe convergenti in un vertice interno a un crease pattern di un origami piatto è pari.

Corollario (Meguro)
L'insieme delle facce di un *crease pattern* di un origami piatto è sempre colorabile con due colori.

Teorema di Kawasaki
In ogni vertice interno a un crease pattern di un origami piatto, la somma degli angoli alternati deve essere 180°.

Quadrato e rettangoli

Pensiamo a quante cose si possono fare con un qualunque foglio di carta. Spesso lo usiamo per scrivere, ci è utile per incartare un regalo o lo stropicciamo e gettiamo via… Ma alcune cose si possono fare solo a partire da un foglio quadrato. Il *quadrato* ha delle proprietà geometriche che possono essere sfruttate nella piegatura, tanto da renderlo il formato di carta prediletto in origami. La sua forma è semplice e ha una grande simmetria. Il cerchio ha la massima simmetria, ma in origami, è meno utilizzabile di quella del quadrato poiché la natura delle pieghe sulla carta è rettilinea. Inoltre il quadrato ha sempre le stesse proporzioni. L'osservazione non è affatto banale se si pensa che i passaggi che conducono a piegare un modello rimangono gli stessi per qualunque dimensione del foglio quadrato di partenza e in ogni dove nel mondo. I fogli che si usano quotidianamente sono rettangolari, ma con i lati in proporzioni diverse nelle varie nazioni [S8].

Figura 4. Rosa di Kawasaki, foglio quadrato

Molte figure in origami vengono piegate a partire da *rettangoli*. Questi possono essere piegati longitudinalmente e lateralmente a formare un'utile griglia.

Figura 5. Cobra di David Derudas, foglio rettangolare

Due rettangoli famosi nella storia della matematica vengono sempre più esplorati dagli origamisti: il rettangolo aureo e il rettangolo d'argento.

Il *rettangolo aureo* ha i lati in proporzione $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Per ottenere un rettangolo aureo da un quadrato sono sufficienti i quattro passaggi seguenti

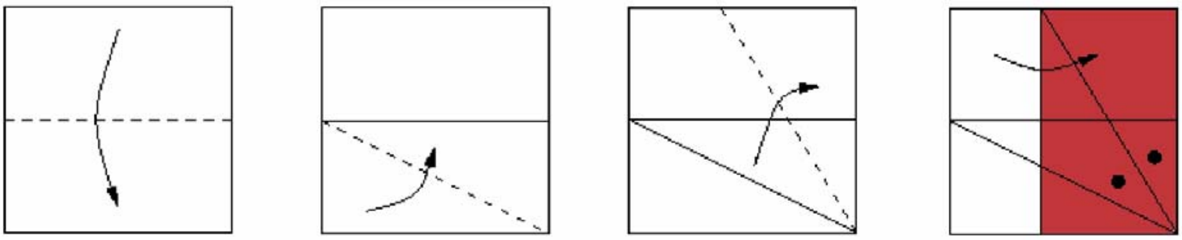


Figura 6. Il rettangolo aureo a partire da un quadrato

Tra le proprietà di questo rettangolo, si osserva che ricavando un quadrato da un rettangolo aureo si ottiene un nuovo rettangolo aureo.

Il *rettangolo d'argento* ha i lati in proporzione $1:\sqrt{2}$. Si ottiene un rettangolo d'argento da un quadrato come mostrato nella figura seguente

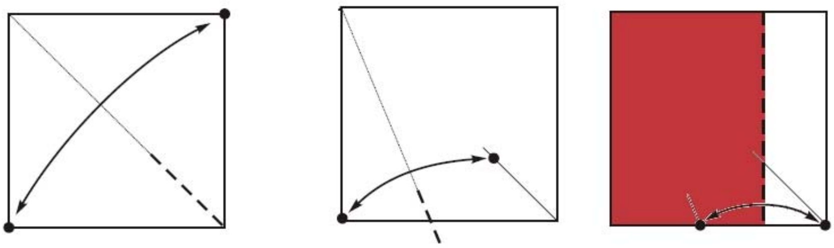


Figura 7. Un rettangolo d'argento a partire da un quadrato

Dividendo a metà un rettangolo d'argento si ottengono altri due rettangoli d'argento. Questa è tra le proprietà che hanno fatto scegliere questo rettangolo come standard (noto come formato **A**) nella maggior parte delle nazioni.

Ora, prendiamo una striscia di carta rettangolare, con un lato molto più lungo di un altro, e facciamo un nodo, vedremo un pentagono e una stella pentagonale in trasparenza. Si può dimostrare con poca geometria che il pentagono è regolare! Non è altrettanto facile piegare strisce di carta per ottenere altri poligoni. Per esempio, è impossibile ottenere un esagono. Si annoda una striscia in un ettagono, ma con una certa dose di pazienza. La dimostrazione di quali poligoni con più di cinque lati si possono ottenere mediante nodi di strisce di carta richiede delle conoscenze algebriche sui gruppi ciclici Z_n [B3].

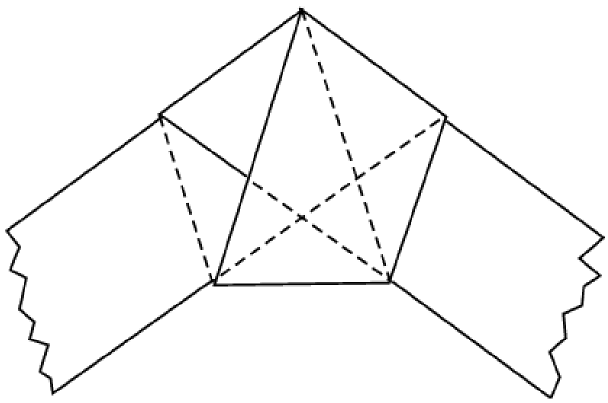


Figura 8. Un nodo fatto con una striscia rettangolare forma un pentagono regolare e una stella pentagonale.

Dopo aver piegato un nodo pentagonale da una striscia di carta su cui si è scritto un messaggio augurale, si può piegare una deliziosa stellina tradizionale cinese conosciuta come stellina portafortuna

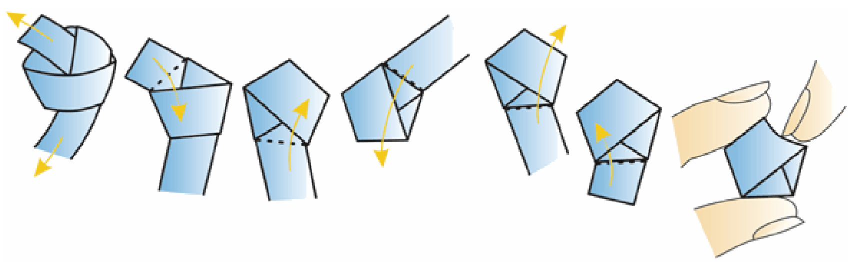


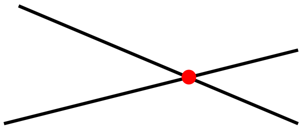
Figura 9. Stellina portafortuna

Costruzioni con riga e compasso e costruzioni origami

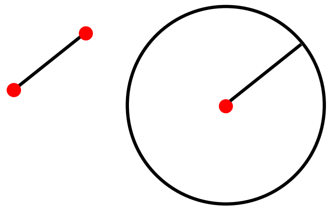
Senza entrare troppo in dettaglio, consideriamo le classiche costruzioni con riga e compasso nella geometria piana euclidea e le costruzioni origami note come “Assiomi di Huzita”.
Nel piano euclideo R^2, a partire da un insieme di punti e utilizzando il compasso e la riga (non graduata) si possono ottenere rette e punti applicando ripetutamente le cinque procedure seguenti

1. Si disegna la retta passante per due punti distinti

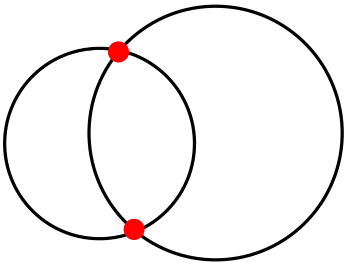
2. Si determina il punto di intersezione di due rette non parallele



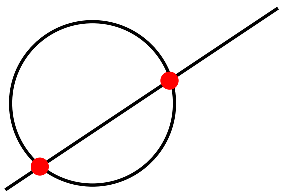
3. Si disegna una circonferenza di centro un punto e raggio pari a un segmento di vertici due punti costruibili con riga e compasso



4. Si determinano i punti di intersezione di due circonferenze secanti



5. Si determinano i punti di intersezione di una retta e una circonferenza che si intersecano

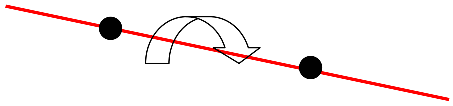


Queste costruzioni non permettono di disegnare ogni tipo di figura. Per la geometria con riga e compasso ci sono delle costruzioni *impossibili*. Tra queste rientrano i tre problemi classici
- trisezione dell’angolo
- duplicazione del cubo
- quadratura del cerchio

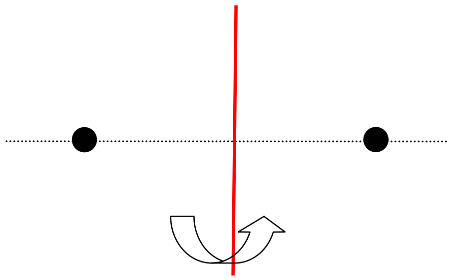
Inoltre è impossibile la costruzione di alcuni poligoni regolari tra i quali l’ettagono e l’ennagono.

Nella geometria origami, l'analogo del piano R^2 è il foglio di carta (che si suppone semitrasparente e infinito) e l'unico strumento che si può utilizzare è la piega. Così un punto si ottiene dall'intersezione di due pieghe e una retta coincide con una piega. Le pieghe seguenti sono chiamate *assiomi dell'origami*

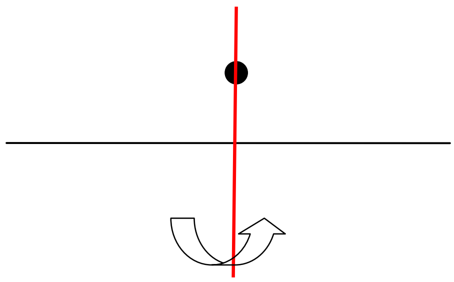
01 Si piega la retta passante per due punti assegnati



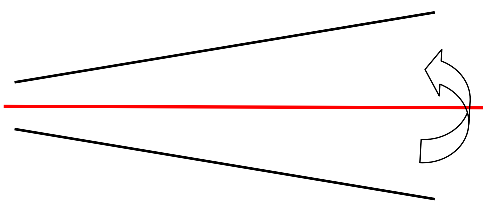
02 Dati due punti è possibile piegare uno sull'altro (ottenendo l'asse del segmento di cui i due punti sono estremi)



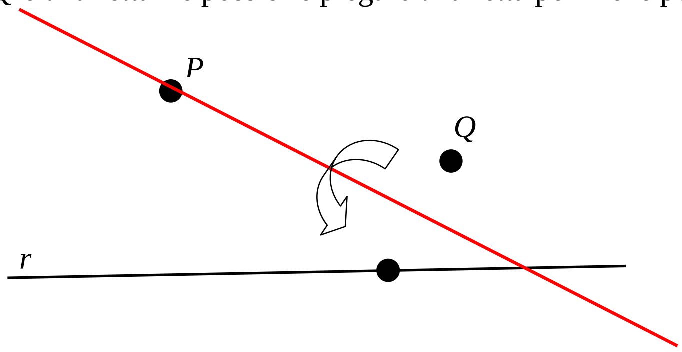
03 Dati un punto e una retta, si piega la perpendicolare alla retta passante per il punto



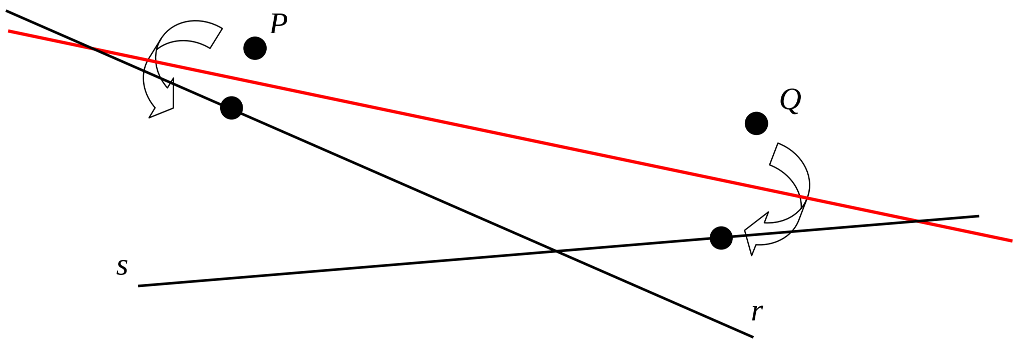
04 Date due rette si può piegare una sull'altra (ottenendo la bisettrice dell'angolo tra le due rette)



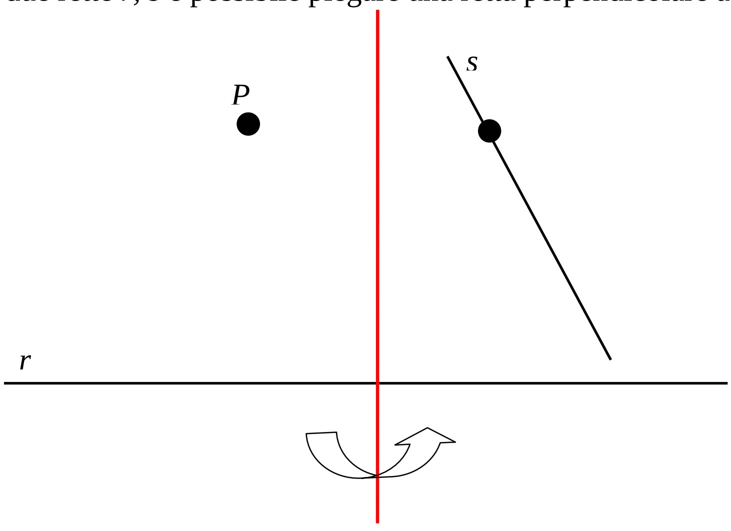
05 Dati due punti *P* e *Q* e una retta *r* è possibile piegare una retta per *P* che porti *Q* su *r*



06 Dati due punti *P*, *Q* e due rette *r*, *s* è possibile piegare una retta che porti contemporaneamente *P* su *r* e *Q* su *s*



07 Dati un punto *P* e due rette *r*, *s* è possibile piegare una retta perpendicolare a *r* che porti *P* su *s*



Queste costruzioni, note come "Assiomi di Huzita-Justin-Hatori", non sono indipendenti tra loro, ma rappresentano tutte e sole le operazioni che definiscono una singola piega in origami, come ha dimostrato Lang nel 2005 [S1].

Osserviamo ora la quinta di queste pieghe particolari. Se chiamiamo *F* un punto e *d* la retta; le pieghe che si ottengono portando ripetutamente *F* su *d* (facendo variare il secondo punto della costruzione) sono le tangenti alla parabola di fuoco *F* e direttrice *d*. Più in generale, con l'origami si risolvono le equazioni di secondo grado.

Analogamente, è possibile mostrare che le pieghe che si ottengono grazie al sesto assioma origami sono le tangenti comuni alle parabole individuate da *(P,r)* e *(Q,s)*. Si dimostra che con l'origami si risolvono le equazioni di terzo grado.

Inoltre si ha che l'insieme di tutte le costruzioni con riga e compasso coincide con l'insieme delle costruzioni origami che si ottengono usando solamente 01, 02, 03, 04, 05. L'assioma 06 permette di costruire una geometria più forte. Pertanto, delle costruzioni impossibili con riga e compasso sono invece possibili in questa nuova geometria. Con l'origami si trisecano gli angoli e si duplica il cubo. I poligoni regolari costruibili con riga e compasso devono necessariamente avere un numero di lati uguale a $n = 2^a p_1 p_2 ... p_k$, dove $p_1, p_2, ..., p_k$ sono numeri primi distinti di Fermat, cioè della forma $2^r + 1$. Gli unici numeri primi di Fermat conosciuti sono 3, 5, 17, 65537. Una delle sfide matematiche ancora aperte è stabilire se c'è un numero finito di primi di Fermat o no. Ripetendo analoghi ragionamenti, si prova che i poligoni regolari costruibili con le pieghe descritte dagli assiomi origami devono necessariamente avere un numero di lati pari a $n = 2^a 3^b p_1 p_2 ... p_k$, dove $p_1, p_2, ..., p_k$ sono numeri primi della forma $2^r 3^s + 1$. I numeri primi di questa forma sono molti di più dei primi di Fermat, ma neppure di questi si sa se siano infiniti: 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, …

Sitografia

[S1] Robert J. Lang, http://www.langorigami.com/
[S2] Centro Diffusione Origami, http://www.origami-cdo.it
[S3] "Origami & Math" Eric M. Andersen, http://www.paperfolding.com/math/
[S4] Tom Hull, http://www.merrimack.edu/~thull/
[S5] David Lister, http://www.britishorigami.info/academic/lister/index.htm
[S6] Thoki Yenn, http://www.britishorigami.info/academic/thok/thok.htm
[S7] Alcuni diagrammi di modelli origami http://www.giladorigami.com/swami/action.html
[S8] "International standard paper sizes", http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html.

Bibliografia

[B1] Robert J. Lang, *Origami Design Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art*, A K Peters, 2003
[B2] AA.VV., *Origami^3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, Thomas Hull Editor, A K Peters, 2002
[B3] Thomas Hull, *Project Origami. Activities for Exploring Mathematics*, A K Peters, 2006