Il Coefficiente Binomiale

di Flavio Cimolin

Supponete di avere davanti a voi 7 palline di colori diversi, da cui ne dovete scegliere 3 a vostro piacimento. In quanti modi diversi potete fare la scelta? Rifletteteci un attimo e vi accorgerete che la risposta non è facile: probabilmente avrete bisogno di qualche minuto di concentrazione e di un bel po' di carta prima di individuare tutte le 35 possibilità che si presentano. E per giunta la risposta non è 7·3 e neppure 7+3, ma un terribile 7·5 che diventa difficile da giustificare a partire dai dati di partenza anche impiegando parecchia fantasia...!

Il problema appena enunciato è uno dei più classici di quella disciplina che viene chiamata *calcolo combinatorio*. Essa si occupa di 'contare' in quanti modi diversi si possano combinare fra loro, in modo ordinato oppure no, elementi di un qualche insieme prestabilito. Altri esempi di problemi di tipo combinatorio sono i seguenti: Quanti sono gli anagrammi diversi della parola 'MAMMA'? E della parola 'AMMANETTARE'? Quanti risultati diversi si possono ottenere dal lancio contemporaneo di 10 monete? Quante possibilità ci sono nell'estrarre ordinatamente 7 palline da un'urna che ne contiene in tutto 30, di cui 15 rosse, 10 verdi e 5 blu? E ancora: in quanti modi diversi si possono classificare i 50 concorrenti che partecipano ad una corsa podistica?

L'unico modo per affrontare problemi del genere con una certa serenità (vi assicuro che con problemi di una certa dimensione dimenticare qualche caso è estremamente facile) consiste nel cercare di ricondursi a una serie ben definita di problemi astratti, formalizzati appunto nel calcolo combinatorio. Una delle applicazioni più interessanti di questa disciplina è legata al *calcolo delle probabilità*, in cui come ben noto bisogna letteralmente "contare" i casi favorevoli e farne il rapporto con tutti quelli possibili, in modo da ottenere un'indicazione della probabilità che l'evento considerato ha di verificarsi oppure no. Vedremo più avanti un'applicazione di questo genere al gioco del Lotto, attorno al quale due volte alla settimana girano parecchi soldi.

Per saggiare le potenzialità del calcolo combinatorio ci occuperemo ora di descrivere una delle sue più basilari (ma non banali) entità: il *coefficiente binomiale*. Grazie a questo importante concetto matematico ci scopriremo immediatamente in grado non solo di risolvere il problema presentato in partenza, ma anche di affrontare un'ampia classe di problemi combinatori simili ad esso… Vedremo come con questo nuovo strumento calcolare la probabilità di fare un ambo al lotto diventa davvero un gioco da ragazzi. E poi… in un batter d'occhio si sveleranno davanti a noi tutta una serie di proprietà notevoli del coefficiente binomiale, a partire da considerazioni puramente intuitive che faremo sulla lista ordinata di tutti i coefficienti binomiali. Scopriremo in particolare come da essa si generi quella meravigliosa struttura che è il *Triangolo di Tartaglia*, fonte inesauribile di curiosità numeriche.

Per iniziare, però, non possiamo che partire dalla base di tutto quello che abbiamo anticipato: la definizione del concetto di *combinazione*.

Chiamiamo "combinazione di n elementi a gruppi di k" un sottoinsieme di k oggetti estratti da un insieme che ne contiene n. Consideriamo diversi due raggruppamenti solo se presentano almeno un elemento differente: non distinguiamo cioè gruppi che contengono gli stessi elementi ordinati in maniera differente. La versione formale del problema con cui abbiamo esordito diventa quindi la seguente: quante sono le possibili combinazioni di 7 palline a gruppi di 3 ciascuna?

Per avere almeno un'idea di come si ricavi la formula che fornisce il risultato, che vedremo a breve, cerchiamo prima di risolvere due problemi più semplici che ci consentiranno di dedurla in maniera assolutamente lineare. Essi coinvolgono altre due entità del calcolo combinatorio, le *permutazioni* e le *disposizioni*, che si distinguono dalle *combinazioni* perché in esse l'ordine con cui vengono elencati gli elementi del sottoinsieme scelto è importante, mentre nelle combinazioni no. Non lasciatevi spaventare: si tratta solo di nomi assegnati a concetti decisamente semplici, che servono a definire nel modo più generale possibile i ragionamenti di base del calcolo combinatorio: non c'è nascosto nulla di difficile. Chiamiamo "permutazioni di n elementi" tutti i modi possibili di elencare gli n elementi di un insieme. Il calcolo del numero di permutazioni di n oggetti è decisamente semplice: al primo posto ci può essere infatti uno qualsiasi degli n oggetti, al secondo uno qualsiasi degli (n-1) rimasti, al terzo uno degli (n-2) rimasti, e così via fino all'ultimo posto, dove ci sarà l'unico rimasto. Il totale risulterà quindi:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Un esempio renderà ancora più chiaro ciò che stiamo elencando. Supponiamo di avere un insieme di 4 oggetti indicati con le lettere {A, B, C, D}. Le possibili permutazioni risultano 4! = 24, e sono date dalle sequenze:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Anziché prendere tutti gli n oggetti disponibili, consideriamone adesso solo un sottoinsieme di k di essi (con $0 \le k \le n$), che chiameremo *disposizione*. Il calcolo del numero di "disposizioni di n oggetti a gruppi di k" segue la stessa linea di quello già visto per le permutazioni: occorrerà però troncare il prodotto dopo i primi k termini. Il totale risulterà di conseguenza:

$$D(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Tornando al nostro esempio, se fra gli n = 4 oggetti consideriamo le disposizioni di k = 2 di essi, ne otteniamo in totale 4!/2! = 12:

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

Come abbiamo detto, le disposizioni si differenziano dalle combinazioni solo per il fatto che nelle prime è importante l'ordine con cui vengono elencati gli elementi, mentre nelle seconde no. Possiamo facilmente elencare a questo punto le combinazioni di 4 elementi in gruppi di 2, che risultano essere solo più 6:

AB	AD	BD
AC	BC	CD

E' evidente che le disposizioni sono di più delle combinazioni, ma precisamente quante di più? Ragionando un momento sulle ultime due tabelle dell'esempio, è abbastanza semplice constatare che tutte le coppie di combinazioni appaiono esattamente replicate nelle disposizioni: se nell'elenco c'è XY, allora c'è anche YX. Questo significa che le combinazioni di 4 elementi a gruppi di 2 sono esattamente la metà delle relative disposizioni. Non è difficile generalizzare al caso più generale, osservando che nelle disposizioni ciascun gruppo di k elementi sarà ripetuto esattamente $k!$ volte, cioè il numero di possibili permutazioni dei k elementi che lo compongono. In definitiva, per ottenere il numero di combinazioni di n elementi a gruppi di k dovremo dividere il numero delle disposizioni per $k!$, ottenendo infine:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se avete qualche dubbio sul ragionamento fin qui esposto, il modo migliore per convincervi della validità della formula è senz'altro quello di fare qualche altra prova con valori differenti di n e k. Il risultato che abbiamo ottenuto è talmente importante da meritare un simbolo matematico tutto nuovo, che viene chiamato *coefficiente binomiale* (l'origine del nome sarà chiaro più avanti, quando vedremo una sua applicazione all'algebra):

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

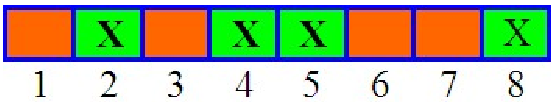
La parentesi tonda che contiene la n in alto e la k in basso si legge "n su k" ed è un simbolo alternativo alla scrittura $C(n,k)$, che per semplicità di notazione continueremo a usare più avanti nel testo. La formula non è nient'altro che una definizione, dunque non esprime in sé alcun risultato particolare. Tuttavia, vedremo a breve che da essa scaturiscono una valanga di stupefacenti proprietà che la rendono indubbiamente degna di rivestire un'importanza di primo piano.

Notiamo anzitutto come il coefficiente binomiale ci consenta una risoluzione quasi immediata di tanti problemi di calcolo delle probabilità apparentemente complicati. Ad esempio: qual è la probabilità di vincere al Lotto giocando un ambo su di una determinata ruota? Il numero di cinquine che possono uscire dall'estrazione è dato dalle combinazioni di 5 dei 90 numeri, cioè C(90,5). Le cinquine che ci faranno vincere sono tutte quelle che contengono l'ambo che abbiamo giocato più qualsiasi terna dei rimanenti 88 numeri, ovvero C(88,3). Per individuare la probabilità di ottenere l'ambo non ci resta a questo punto che da fare il rapporto fra i casi possibili e i casi favorevoli:

$$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{88!}{3!85!} \cdot \frac{5!85!}{90!} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \approx 0.0024969$$

Il risultato si poteva in realtà ottenere in diversi altri modi, ma indubbiamente l'uso del coefficiente binomiale rende il calcolo chiaro, elegante e facilmente generalizzabile. Se siete giocatori, vi consiglio di andare a controllare qual è la vincita riconosciuta dal gestore nel caso di uscita dell'ambo e di trarre da soli le vostre conclusioni su quanto sia conveniente giocare…

È interessante, sempre rimanendo nell'ambito del calcolo combinatorio, constatare come lo stesso coefficiente binomiale consenta di risolvere anche il seguente problema, apparentemente diverso da quello che abbiamo finora visto. In quanti modi diversi si possono collocare k oggetti identici dentro $n \geq k$ contenitori, mettendone al più uno per contenitore? Che ci crediate o no, il risultato è nuovamente C(n,k). Per capire come mai questo problema sia equivalente al precedente, basta in realtà assegnare un numero identificativo a ciascuno dei contenitori (si veda la figura sotto). Inserire k oggetti equivale a questo punto a scegliere k contenitori fra n, e quindi... ecco riapparire le combinazioni, questa volta associate ai contenitori anziché agli oggetti!



Quanto abbiamo visto finora non sono altro che applicazioni del concetto di base da cui siamo partiti. Il coefficiente binomiale non sarebbe così interessante se ci si limitasse solo alle peculiarità che seguono direttamente dalla sua definizione. Mostreremo ora come le sue proprietà vadano in realtà ben oltre il calcolo combinatorio...

Per fissare le idee, scriviamo in modo ordinato *tutti i coefficienti binomiali*. Dato che il valore di k deve essere compreso fra 0 e n, ne avremo ogni volta uno in più: disponiamoli dunque a piramide, otterremo la struttura seguente:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{1}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

Fin qui nulla di speciale, si tratta di un modo come un altro di elencare tutte le possibili combinazioni. Il bello viene quando si sostituisce al posto dei coefficienti binomiali il loro valore calcolato con la formula. Il gruppo di numeri che ne deriva viene chiamato *Triangolo di Tartaglia* o anche *Triangolo di Pascal*:

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

Sicuramente avrete già notato almeno una delle peculiarità di questo triangolo: lungo le diagonali esterne ci sono tutti '1' e in ogni casella interna il numero è dato dalla somma dei due numeri immediatamente al di sopra di esso. L'eclettico matematico italiano del XVI secolo, Niccolò Fontana, detto "Tartaglia" per la sua balbuzie, fu il primo a costruire il Triangolo, ottenendolo appunto con la regola ricorsiva che prevede di sommare le coppie di numeri di una riga per ottenere quelli della riga sottostante. Soltanto un secolo dopo, il matematico (ma anche fisico e filosofo) francese Blaise Pascal scoprì l'intima relazione tra il Triangolo di Tartaglia con i coefficienti binomiali.

Dal punto di vista dei coefficienti binomiali la proprietà che abbiamo osservato giunge assolutamente inaspettata rispetto alla formula da cui siamo partiti. Sembra proprio che esista una relazione ricorsiva per i numeri all'interno del triangolo che consenta di calcolare C(n,k) a partire da sui valori più piccoli, ovvero per la precisione:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Per chi lo desidera, sarà un semplice esercizio mostrare algebricamente che questa relazione è valida, tuttavia è molto più illuminante riflettere su di essa in modo "combinatorio". Una simpatica interpretazione è la seguente: consideriamo uno qualsiasi degli oggetti fra gli n dell'insieme dato, e chiamiamolo X. Supponiamo ora di avere sul tavolo davanti a noi tutte le possibili combinazioni degli n oggetti a gruppi di k. Decidiamo di spostare sulla sinistra del tavolo tutte quelle che non contengono l'oggetto X, mentre sulla destra quelle in cui esso è presente. Quante sono le combinazioni che abbiamo messo a sinistra? Sono C(n-1,k), infatti sono tutte le combinazioni degli n-1 elementi diversi da X a gruppi di k. E quelle dalla parte destra? Dato che sappiamo già che l'elemento X è presente, il loro numero sarà dato dalle combinazioni dei rimanenti n-1 oggetti a gruppi di k-1, cioè C(n-1,k-1). Ecco che la scomposizione, che prima ci poteva apparire quantomeno strana, ora diventa perfettamente chiara e convincente!

E adesso non c'è che da sbizzarrirsi con le proprietà del triangolo di Tartaglia, che saltano letteralmente fuori come noccioline. Anzitutto è chiaro (e anche banale da mostrare) che il triangolo è simmetrico rispetto alla verticale, che sulle due diagonali esterne ci sono tutti '1', sulle seconde diagonali ci sono tutti i numeri naturali, poi sulle terze ci sono le somme dei numeri naturali (1, 1+2=3, 1+2+3=6, ...), ovvero i cosiddetti *numeri triangolari*, poi sulle quarte ci sono le somme delle somme, cioè i *numeri tetraedrici*, e così via... Se guardiamo ancora più "storto" il triangolo, ovvero secondo diagonali inclinate evidenziate nella figura dai colori, riusciamo addirittura a trovare i *numeri di Fibonacci* (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), ovvero quelli in cui ogni numero è la somma dei due precedenti. Per vederlo, proviamo a fare la somma dei numeri dello stesso colore lungo una diagonale "storta". Ad esempio, partendo dal numero 1 giallo nella quarta riga a destra e scendendo verso il basso in diagonale, troviamo sempre in giallo i numeri 1, 6, 5, 1. Sommandoli si ottiene 13, esattamente l'ottavo numero di Fibonacci! Ve lo sareste mai aspettato?

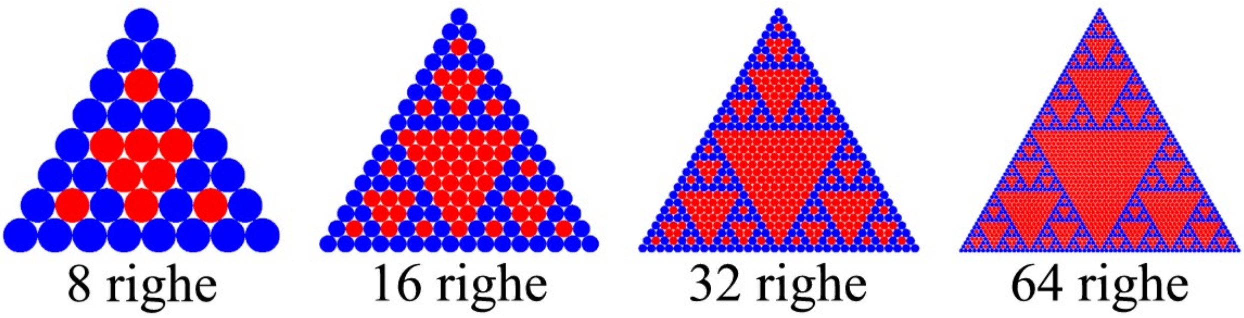
Adesso basta con le diagonali, leggiamo la tabella per linee orizzontali! Anzitutto, notiamo che nelle prime righe si leggono direttamente $11^0=1$, $11^1=11$, $11^2=121$, $11^3=1331$, $11^4=14641$ (e si potrebbe anche andare avanti, se trattassimo opportunamente i riporti). Possiamo anche aggiungere degli zeri in mezzo e considerare che $1001^2=1002001$, $1001^3=1003003001$, e così via per altri casi: mettendo sempre più zeri in mezzo si vedranno comparire intercalati ad essi esattamente i numeri del Triangolo di Tartaglia delle varie righe!

Si può anche dare un'interpretazione algebrica ai numeri delle righe, osservando che essi sono i coefficienti del cosiddetto *binomio di Newton* (da cui il nome "coefficiente binomiale"): $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,... In generale, si ha l'importantissima formula:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Ora guardate quale altra bella sorpresa ci riserva questa interpretazione che sfrutta i polinomi. Se sostituiamo *a* e *b* con il numero 1, cosa otteniamo dalla formula? La somma dei coefficienti binomiali sulla riga *n*-esima della tabella (iniziando a contare da 0 sulla prima riga) vale esattamente 2^n. Provare per credere! La spiegazione intuitiva di questo fatto è che la somma di tutti i modi possibili di combinare fra loro *n* elementi corrisponde al numero di *partizioni* dell'insieme considerato. Le partizioni sono un altro concetto combinatorio che consiste appunto nell'unire assieme tutti i possibili raggruppamenti di oggetti di un insieme dato (comprendendo anche l'insieme con nessun oggetto e l'insieme originario). Si può dimostrare che il numero di partizioni possibili di *n* oggetti è dato proprio da 2^n (se per caso volete provare a dimostrarlo, il suggerimento è di provare a farlo per induzione, ovvero mostrando che vale per $n = 1$ e poi che, se vale per *n*, allora vale anche per $n+1$).

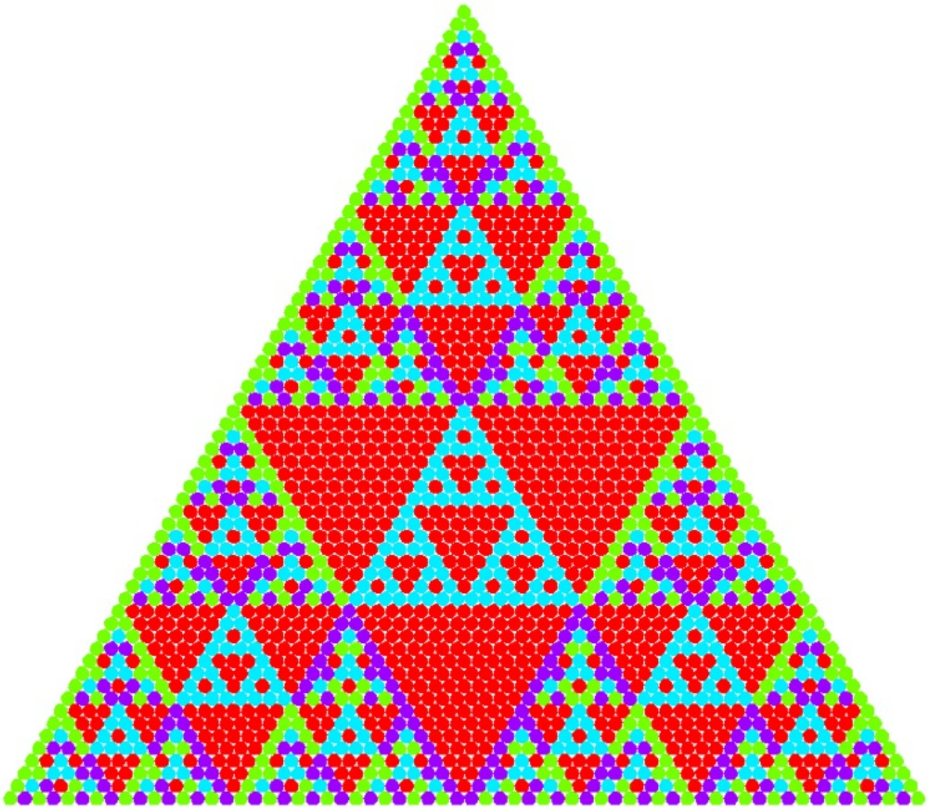
Per concludere in bellezza – mai come in questo caso l'espressione è stata più appropriata – vediamo un risvolto "artistico" del Triangolo, che lo collega all'affascinante mondo dei *frattali*. Dopo aver calcolato una buona quantità di righe (a farlo a mano sarebbe un po' lunghetto, perciò lo abbiamo fatto qui con l'aiuto di un software), coloriamo in rosso tutte le caselle in cui compaiono numeri pari e in blu quelle con i dispari. Ecco cosa risulta:



Come si vede, i numeri pari appaiono disposti su triangolini rovesciati di diverse dimensioni. Via via che vengono aggiunte righe si delinea una struttura davvero molto particolare, caratterizzata da una sorprendente *autosimilarità*. Se dimenticassimo per un momento che le immagini derivano dal Triangolo di Tartaglia, potrebbe quasi sembrare che esse costituiscano ognuna un "infittimento" della precedente, ottenuao aggiungendo dei triangolini rossi sempre più piccoli in corrispondenza dei "buchi" lasciati nella zona blu. Ma questo è esattamente il tipo di procedura che si usa per la generazione di figure frattali! Il frattale corrispondente a questo tipo di costruzione è noto come *Gemma di Sierpinski*. Ecco una inaspettata quanto spettacolare relazione fra il Triangolo di Tartaglia (e di conseguenza anche fra il coefficiente binomiale) e il mondo dei frattali!

Altre immagini ancora, sempre con struttura di tipo frattale, si possono ricavare se, anziché considerare i numeri pari e dispari, ovvero il resto della divisione per 2, si assegna un colore diverso ai vari resti della divisione per un qualsiasi numero naturale *N*. Ad esempio, i possibili resti della divisione per

4 sono 0, 1, 2, 3. Se ad essi associamo rispettivamente i colori rosso, verde, azzurro, viola e usiamo questi colori per rappresentare le prime 4^3=64 righe del triangolo di Tartaglia, otteniamo l'immagine seguente:



Le figure di queste pagine sono forse le parole migliori per descrivere l'incredibile eleganza che compare nelle strutture che derivano dal coefficiente binomiale. Il calcolo combinatorio, la teoria delle probabilità, le divertenti proprietà aritmetiche del Triangolo di Tartaglia, ma anche la potenza di espressione analitica del binomio di Newton e il raffinato legame con il mondo dei frattali. Chi l'avrebbe mai detto che quel concetto combinatorio da cui siamo partiti potesse racchiudere in sé tutte queste meraviglie matematiche?