Elementi di geometria descrittiva in natura e in architettura

di Rosa Marincola[1]

SUNTO L'obiettivo di questo lavoro è di offrire degli spunti ai docenti, per percorsi didattici sullo studio di curve e superfici rigate, nella scuola secondaria superiore. I modelli di riferimento sono tratti dalla natura e dall'architettura.

ABSTRACT The aim of this work is to give some ideas to the teachers, in order to offer didactic paths about the study of curves and ruled surfaces, in the high school. The reference models are taken from the nature and architecture.

PAROLE CHIAVE catenaria, superfici rigate, paraboloide iperbolico.

1. Introduzione

Sin dall'antichità lo studio delle coniche ha condotto a importanti scoperte sia in matematica pura che in quella applicata. Varie situazioni, in ambito economico, tecnico e scientifico, possono essere affrontate e descritte utilizzando le coniche come modello. Per questi motivi, oltre che per il valore formativo che può avere un qualunque argomento di matematica, in particolare se ha una lunga tradizione, esse occupano un posto di primo piano nell'insegnamento della matematica sia nell'ambito della scuola secondaria superiore che in quello universitario.
Altrettanto non avviene per quanto riguarda lo studio di curve e superfici rigate che, a mio avviso, meriterebbero uno spazio nei curricoli di tutti gli studenti, a partire dalla scuola secondaria di secondo grado. Esse, infatti, presentate come particolari applicazioni e come naturale estensione del concetto di conica, non comportano particolari difficoltà d'apprendimento e forniscono modelli che consentono di descrivere forme presenti in natura e in capolavori architettonici[2]. Un'intelligente introduzione di questi argomenti potrebbe consentire di stimolare la curiosità degli studenti, motivarli a ulteriori approfondimenti e, più in generale, a significative attività matematiche.
Nei paragrafi 2 e 3 di questo articolo propongo alcune idee per un possibile percorso didattico che parta dall'osservazione di forme naturali o architettoniche. In particolare, nel paragrafo 2 si individuano alcuni modelli geometrici presenti nel Parco Nazionale del Pollino, in provincia di Cosenza, nel paragrafo 3 si invita a osservare gli stessi modelli nelle opere del grande artista catalano Antoni Gaudì (1852-1926) detto "L'architetto di Dio". Seguono, infine, due brevi paragrafi sulla catenaria e sul paraboloide iperbolico, per un approccio basato sulla costruzione e la manipolazione di modelli geometrici, con l'ausilio di software per la matematica.

2. Il Monte Sellaro: una superficie rigata da schiere di escursionisti e pellegrini

Provenendo da Sud lungo l'autostrada Salerno-Reggio Calabria, il Massiccio del Pollino[3] [2] appare disposto trasversalmente rispetto alla catena appenninica. Addentrandosi in questo luogo di straordinaria bellezza, la realtà diventa fiabesca. In uno scenario multiforme e selvaggio si trovano

[1] I.I.S.S. "A. Guarasci" sez. I.T.C. - Rogliano (Cs), e-mail rosamarincola@virgilio.it
[2] www.nexusjournal.com
[3] www.parcopollino.it

esemplari di pino loricato, la cui corteccia evidenzia una crescita secondo curve elicoidali, mentre ginepri emisferici ricoprono il terreno.
Il carsismo superficiale, dovuto all'azione erosiva delle acque ricche di CO_2, su rocce di natura calcareo-dolomitica, ha determinato un mosaico di doline a scodella (caratteristica quella detta "del compasso") e inghiottitoi a imbuto. Lo stesso fenomeno, nel sottosuolo ha formato grotte, pozzi, voragini e caverne. Una grande varietà di forme che merita di essere descritta anche dal punto di vista geometrico: sembra che la natura modelli piante, animali, paesaggi secondo forme funzionali all'ambiente. Questi aspetti possono essere analizzati in classe: sono noti vari problemi di massimo e minimo che possono essere costruiti per descrivere le "scelte" della natura [1].

M. Sellaro (foto dell'autore)

Ultimo contrafforte orientale dei monti del Pollino è il Monte Sellaro (1439 m.). Staccato dagli altri rilievi della catena (risalenti all'era mesozoica e terziaria) per effetto della tettonica distensiva a fosse e rilievi, la sua cima appare spaccata e modellata nel tempo come una sella: un paraboloide iperbolico! Esso degrada sulla piana di Sibari che si estende fino al mar Ionio. Dalla cima, è possibile vedere il Parco del Pollino, la marina di Sibari e in condizioni atmosferiche particolari, il Golfo di Taranto.
Questo monte ha sempre avuto un particolare fascino: qui storia, miti e leggende si intrecciano. Alcuni studiosi identificano il sito archeologico di Timpone la Motta con l'antica città di Lagaria. Questa città, secondo la leggenda, fu fondata da Epeo che avrebbe costruito il mitico cavallo di Troia col legname proveniente dalle pendici del Sellaro. Sul suo versante meridionale a 1015m., nel Parco della Cessuta (comune di Cerchiara di Calabria), nel XV secolo venne edificato il Santuario della Madonna Delle Armi (τῶν ῾Αρμῶν = delle rocce). La leggenda vuole che alcuni cacciatori, nell'inseguire un cervo in una grotta, ebbero la visione miracolosa della Madonna. Sul luogo venne costruito il suggestivo Santuario, meta di pellegrinaggi.
Foto di queste bellezze naturali possono essere utilizzate per insegnare ai giovani a osservare e scoprire nella realtà forme geometriche. L'insegnante, in questo caso, svolge un ruolo non solo motivante, di chi crea "l'occasione", ma anche il più delicato e significativo ruolo dell'esperto che presta ai principianti le lenti della teoria, in questo caso della geometria descrittiva. Diceva il grande filosofo Arthur Schopenhauer: *"I pensieri messi per iscritto non sono nulla di più che la traccia di un viandante nella sabbia: si vede bene che strada ha preso, ma per sapere che cosa ha visto durante il cammino bisogna far uso dei suoi occhi"*.

3. Gaudì e le forme della geometria

"Io ho immaginazione, non fantasia", questo diceva Gaudì di se stesso [5]. L'immaginazione permette di vedere la realtà delle cose, la fantasia le rielabora. Egli fu un sottile osservatore della natura. In natura tutto è funzionale. Gli architetti hanno sempre usato la geometria euclidea, eseguendo costruzioni con riga e compasso. La natura in molti casi segue un'altra geometria, Gaudì fu un appassionato studioso di geometria descrittiva durante tutta la sua vita. Era affascinato dalle superfici rigate, soleva dire: "El paraboloide es el padre de toda la Geometria". La sua architettura si basa concretamente sul paraboloide, sull'iperboloide a una falda, sul paraboloide iperbolico e sull'elicoide. Riproduceva forme della zoologia, della geologia e della botanica che arricchiva con elementi decorativi. Un tronco d'albero, spesso ha la forma di un iperboloide a una falda; e così il femore, che, per Gaudì, è una magnifica colonna fatta da Dio per camminare, che funziona meglio di una colonna cilindrica. Proprio questa è la forma con cui il maestro ha costruito alcune colonne nella Sagrada Familia, una sorta di foresta pietrificata. Esempi magistrali di volte e superfici a forma di paraboloide iperbolico si trovano nella cripta della chiesa nel Parco Güell e nelle Scuole Temporanee della Sagrada Familia [2]. Come architetto, Gaudì è stato un grande innovatore, ma, nei suoi progetti, così originali, ha sempre usato la geometria più classica: quella delle curve e superfici di facile descrizione analitica. Non usò, però, l'arco classico nella costruzione di modelli di volte, bensì archi di catenaria. Questa curva, irrigidita e rovesciata, è autoportante: in scienza delle costruzioni si insegna che la catenaria è la forma migliore che può assumere un arco per sostenere il proprio peso perché è soggetto solo a sforzi di compressione. Invece, nelle cattedrali gotiche (XII-XIII sec.), di cui Gaudì fu un appassionato studioso, fu necessario costruire archi rampanti e contrafforti laterali, perchè l'arco a sesto acuto causava spinte laterali e quindi richiedeva un ispessimento nel punto d'incontro tra la parete verticale e la caduta dell'arco. Occorre precisare che i modelli a catenaria non furono una soluzione del tutto innovativa, perché già Brunelleschi (1377-1446), aveva costruito i cosiddetti modelli "a corda blanda" della cupola di S. Maria in Fiore.

Gaudì dedicò gli ultimi quindici anni della sua vita per cercare di precisare tutte le regole geometriche che avrebbero permesso ai posteri di proseguire il cantiere della Sagrada Familia, opera incompiuta.

4. La catenaria

Se si regge una catena o una corda, fissandola per gli estremi, essa assume, per effetto della forza di gravità, la forma della catenaria.

Galileo, pur essendo riuscito a dimostrare che la traiettoria di un proiettile è una parabola, studiando la curva di sospensione di una catena, erroneamente, identificò la catenaria con la parabola. Nel 1669, il matematico tedesco, Jungius, dimostrò che quella curva non era una parabola.

La catenaria ha equazione y = cosh(x), ossia è il coseno iperbolico, ma da che cosa deriva l'aggettivo iperbolico?

Generalmente, nei libri di testo per le scuole superiori [4], le funzioni iperboliche sono trattate sommariamente. Esse sono così definite:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Il loro grafico si può ottenere per composizione elementare di grafici. Per il coseno iperbolico, si ha la costruzione rappresentata nella seguente figura 1.

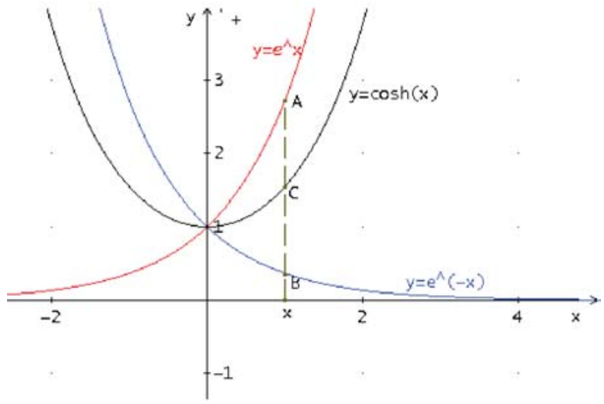

Figura 1

Si osserva che il coseno iperbolico è crescente per x>0, decrescente per x<0, ha un minimo assoluto di valore 1 per x=0.

Tuttavia, dalle (1) è immediata la verifica della relazione:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (2)$$

per cui, le funzioni iperboliche esprimono, parametricamente, le coordinate dei punti della iperbole equilatera di equazione $X^2 - Y^2 = 1$, in modo analogo a come le funzioni circolari parametrizzano la circonferenza [4].

Sia P un punto appartenente all'iperbole (figura 2), sia P' il suo simmetrico rispetto all'asse X; indicando con α l'area del settore iperbolico P'OP si possono definire le coordinate di P(X;Y) come

[4] http://it.wikipedia.org/wiki

funzioni del settore iperbolico di area $^1/_2$ α, definiamo quindi seno iperbolico l'ordinata del punto P e coseno iperbolico la sua ascissa.

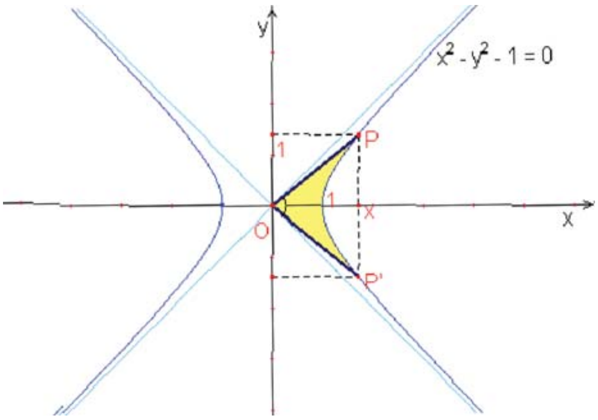

Figura 2

Attribuendo un segno positivo alle aree corrispondenti a un punto P del primo quadrante e negativo per P appartenente al secondo quadrante, si avrà che il dominio delle tre funzioni iperboliche è l'insieme dei numeri reali. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} &\cosh(-\beta) = \cosh\beta \\ &\sinh(-\beta) = -\sinh\beta \qquad (3) \\ &\mathrm{tgh}(-\beta) = -\mathrm{tgh}\,\beta \end{aligned}$$

come le funzioni circolari, il coseno iperbolico è una funzione pari, seno e tangente iperbolici sono dispari (gli studenti possono dedurre le proprietà delle funzioni iperboliche considerando le (1)).
Altre relazioni sono facilmente individuabili per analogia con le funzioni circolari.
Questa attività (lo stesso dicasi per quella che segue), può essere un'occasione per colmare eventuali lacune, chiarire dubbi e consolidare le conoscenze pregresse. Come in ogni azione didattica, è necessario che il docente guidi la discussione, affinché gli studenti possano acquisire nuove conoscenze, ma, attraverso continui richiami e rimandi, possano ripercorrere a ritroso l'iter didattico per un attento riesame di quanto è stato già appreso.

5. Il paraboloide iperbolico

Le quadriche sono presenti solo in alcuni libri di testo in uso nei licei scientifici e negli istituti tecnici industriali, ma di esse vengono riportate solo le equazioni e i grafici. È pur vero che i tempi ristretti e la complessità dell'argomento non consentono di trattarlo in modo esaustivo, ma può essere opportuno fornire in modo semplice e intuitivo alcune conoscenze di base che possono stimolare nei giovani l'interesse per la matematica.
Le quadriche, come modelli di forme presenti in natura, dovrebbero far parte del bagaglio culturale di ogni studente alla pari delle figure geometriche piane e solide, mentre la stragrande maggioranza delle persone ignora che queste sono oggetto di studio in campo matematico. Mi limiterò a proporre un possibile approccio a un esempio notevole di paraboloide iperbolico, partendo dall'iperbole.
Molte leggi della matematica e della fisica hanno un'equazione del tipo:

$$xy = k, \qquad (4)$$

dove $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ è una costante.
Tali leggi esprimono la relazione di proporzionalità inversa tra le variabili x e y. Assumendo x come variabile indipendente e y come variabile dipendente, il grafico della funzione $y = k/x$ è quello di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.
Applicando alla (4) una rotazione di π/4 di equazioni:

$$\begin{aligned} &x = X\cos(\pi/4) - Y\sin(\pi/4) \qquad (5) \\ &y = X\sin(\pi/4) + Y\cos(\pi/4) \end{aligned}$$

si ottiene, dopo semplici calcoli, un'equazione del tipo $x^2 - y^2 = a^2$, ossia un'iperbole equilatera di centro l'origine e avente per asintoti le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano.
Se al posto della costante k consideriamo la variabile z, l'equazione

$$z = xy \qquad (6)$$

rappresenta un paraboloide iperbolico [3]. Il grafico 3D (figura 3) può essere costruito con un software per la matematica (come ad esempio Derive 6) e può essere esplorato, semplicemente, determinando le sezioni con dei piani. In particolare, si osserva (graficamente e analiticamente), che intersecando la superficie, con piani paralleli al piano yz (di equazione $x = t$, $t \in \mathbf{R}$) si ottengono rette e, analogamente, se si considerano le sezioni con piani paralleli al piano xz (di equazione $y = m$, $m \in \mathbf{R}$) si ha un'altra famiglia di rette.

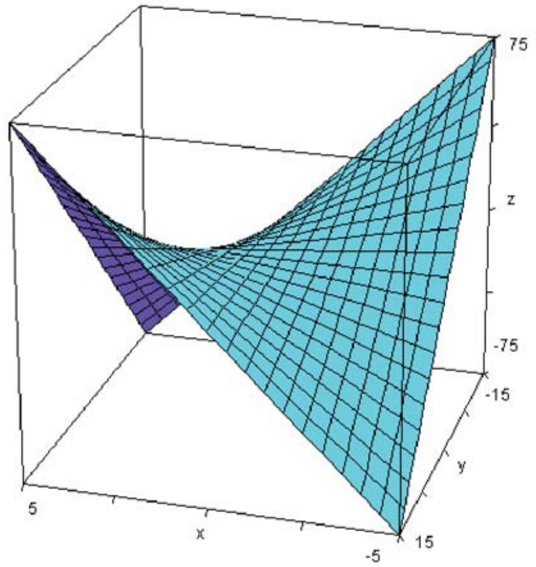

Figura 3

Questi due insiemi costituiti da infinite rette, giacciono interamente sulla superficie e vengono chiamate schiere o regoli. Per questo motivo, si dice che il paraboloide iperbolico è una superficie doppiamente rigata. Per ogni punto della superficie passano due rette incidenti appartenenti alle due schiere, mentre due rette della stessa schiera sono sghembe. Interessante è anche lo studio della proiezione della superficie sul piano *xy*.
Analogamente a quanto è stato fatto con l'iperbole, applicando al paraboloide iperbolico $z = xy$, una rotazione di $\pi/4$ nel piano xy (equazioni (5)), la sua equazione diventa: $x^2 - y^2 = 2z$ (figura 4). Essa, poiché è stata ottenuta mediante una trasformazione isometrica, presenterà le stesse caratteristiche della (6).
A questo punto si può anche considerare il caso più generale di paraboloide iperbolico, ma ciò che ho voluto evidenziare è che utilizzando metodi d'indagine di geometria descrittiva, è possibile studiare in tutti gli istituti secondari superiori, superfici apparentemente molto complesse. Esse, presentate come modelli di forme reali, possono coinvolgere e appassionare i giovani allo studio della matematica.

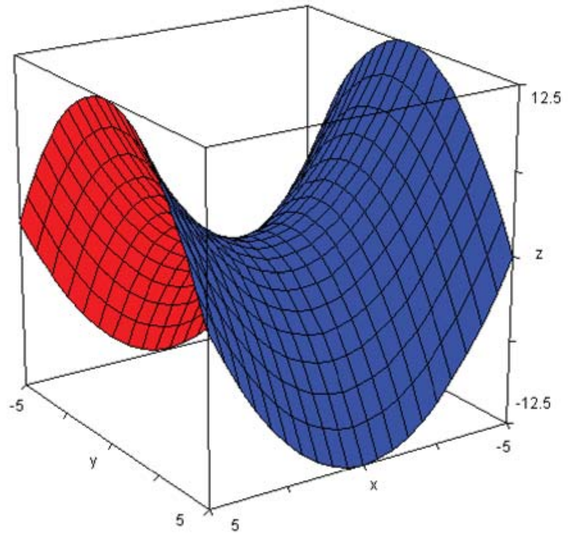

Figura 4

Ringraziamenti

Ringrazio l'amico Luigi Gabriele per il materiale sul Parco del Pollino, le colleghe del Liceo Scientifico "V. Bachelet" di Spezzano Albanese: prof.ssa Teresina Ciliberti e prof.ssa Giuliana Chiappetta per i preziosi consigli.
Ringraziamenti particolari al prof. Domingo Paola e alla prof.ssa Margherita D'Aprile per il sostegno e la collaborazione alla stesura di questo articolo.

Bibliografia

[1] Barra M. & Castelnuovo E.: 2000, Matematica e realtà, Bollati Boringhieri,Torino(1976). Da pag. 140 a pag. 161
[2] Ceccarelli N., Antoni Gaudì: alla ricerca della forma
www.mediadigitali.polimi.it/ddd/ddd_004/art_pdf/ceccarelli.pdf
[3] CARMO M. P. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.Pag 193
[4] LAMBERTI L., MEREU L., NANNI A, *Corso di matematica,* Vol 2, ETAS LIBRI per le scuole superiori, 2000.Pag. 253
[5] Ricciardi G., "Io ho immaginazione, non fantasia"
www. 30giorni.it/it/articolo_stampa.asp?id=183