

154. Moltiplicazione

di Michele T. Mazzucato

...potrà sempre da sé formar nuovi metodi e batteggiarli come gli parerà.

General trattato di numeri et misure (1556-60)

Niccolò Fontana “Tartaglia”

La moltiplicazione, insieme all’addizione, sottrazione e divisione, è una delle quattro operazioni fondamentali dell’aritmetica. I termini della moltiplicazione sono chiamati *fattori* (*moltiplicando* e *moltiplicatore*) mentre il risultato prende il nome di *prodotto*.

$$\text{moltiplicando} \times \text{moltiplicatore} = \text{prodotto}$$

Le proprietà algebriche della moltiplicazione sono quella *commutativa* (scambiando l’ordine dei fattori il risultato non cambia):

$$8 \times 2 = 2 \times 8$$

associativa (se al posto di alcuni fattori si sostituisce il loro prodotto il risultato non cambia)

$$4 \times 2 \times 3 = (4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3)$$

dissociativa (se a uno o più fattori se ne sostituiscono altri il cui prodotto è uguale al fattore sostituito il risultato non cambia):

$$8 \times 12 = (4 \times 2) \times 12 = 8 \times (4 \times 3)$$

e *distributiva* (scomponendo un fattore si può moltiplicare l’altro fattore per ciascun termine dell’addizione o sottrazione e aggiungere o sottrarre poi i prodotti parziali ottenuti):

$$\begin{aligned} 14 \times 32 &= 448 \\ 14 \times (24 + 8) &= (14 \times 24) + (14 \times 8) = 336 + 112 = 448 \end{aligned}$$

Ogni numero moltiplicato per 1 (elemento neutro della moltiplicazione) ha come risultato il numero stesso mentre moltiplicato per 0 (elemento assorbente della moltiplicazione) ha come risultato zero.

Per indicare l’operazione della moltiplicazione si utilizzano indifferentemente i segni $\times$, $\cdot$ e $*$. Il segno $\times$ viene accreditato a William Oughtred (1574-1660) che usò nell’opera *Clavis Mathematicae* (1631), il punto medio di moltiplicazione $\cdot$ venne introdotto da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) che, in una lettera diretta a Johann Bernoulli (1667-1748) nel 1698, scrisse: “*I do not like X as a symbol for multiplication, as it is easily confounded with x...*”. Stesso segno che il prof. Dino Betti riferisce causa di confusione fra i giovani allievi argomentando: “... *che ciò sia dovuto al fatto che quando la sua maestra gli ha spiegato la moltiplicazione l’allunno non era ancora completamente lateralizzato (la lateralizzazione è la facoltà di distinguere un oggetto dipendentemente dalla sua posizione: per un bimbo di 3 anni i simboli $\times$ e $+$ sono lo stesso simbolo e qualcuno raggiunge prima e qualche altro dopo la facoltà di distinguerli)*”. Infine, il segno $*$ introdotto da Johann Rahn (1622-1676) nell’opera *Teutsche Algebra* (1659) è oggi largamente utilizzato in informatica.

Di fatto la moltiplicazione non è altro che una addizione abbreviata. Infatti, per esempio 8×3 significa sommare il numero 8 tre volte ossia $8 \times 3 = 8 + 8 + 8$.

Dalla proprietà distributiva si deduce il metodo per eseguire la moltiplicazione di due numeri. Si scrive uno dei due numeri come somma di tante unità, decine, centinaia, etc. quante indicato dalle cifre componenti il numero in esame e si moltiplica la somma così ottenuta per l’altro numero. Per esempio:

$$103 \times 48$$

$$103 \times (4 \times 10 + 8) = (103 \times 4) \times 10 + 103 \times 8$$

usando lo stesso procedimento per l'altro numero si ha:

$$\begin{aligned} & [(1 \times 100 + 0 \times 10 + 3) \times 4] \times 10 + [(1 \times 100 + 0 \times 10 + 3) \times 8] = \\ & = 4000 + 12 \times 10 + 8 \times 100 + 24 = 4000 + 120 + 800 + 24 = 4944 \end{aligned}$$

Molti sono i metodi per eseguire una moltiplicazione. Vediamone alcuni esempi.

Moltiplicazione odierna

Nel Rinascimento chiamata *per bericuocolo* in Toscana (dal nome di dolcetti toscani), *per scacchiere* a Venezia, *per organetto* a Verona. Quella a noi nota e utilizzata si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} 103 \times \\ 48 = \\ \hline 824 + \\ 412 = \\ \hline 4944 \end{array}$$

Moltiplicazione egizia (metodo dei raddoppi)

Esempi se ne trovano nei due più importanti documenti matematici egizi ossia il Papiro di Ahmes o di Rhind e il Papiro di Mosca o di Goleniščev. Il primo prende il nome dallo scriba Ahmes che lo trascrisse nel 1650 a.C. circa traendolo da uno precedente risalente al 2000 a.C. circa ma anche dal nome del collezionista scozzese Alexander Henry Rhind (1833-1863) che lo acquistò nel 1858 a Luxor in Egitto. Oggi si trova al British Museum di Londra che lo acquistò nel 1863, alcuni piccoli frammenti sono conservati anche presso il Brooklyn Museum di New York. Il papiro è lungo 199,5 e largo 32 centimetri ed è scritto in lingua ieratica. Esso contiene 84 problemi matematici con le relative soluzioni e tabelle di frazioni. Il secondo, risalente al 1850 a.C. circa di autore ignoto, prende il nome dal nome dell'egittologo Vladimir Semyonovich Goleniščev (1856-1947), suo primo possessore, che lo acquistò a Tebe in Egitto nel 1893. Ceduto al governo russo nel 1911 oggi si trova presso il Museo Puškin delle belle arti di Mosca da cui l'altro nome. Il papiro è lungo 544 e largo 8 centimetri ed è scritto anch'esso in lingua ieratica e contiene 25 problemi matematici.



Papiro della scriba di Ahmes (1650 a.C.)



Papiro di Mosca (1850 a.C.)

La moltiplicazione egizia si esegue nel seguente modo. Si formano due colonne. In quella di sinistra si fanno i raddoppi successivi partendo dall'unità fino al valore non superiore al moltiplicando 103. Nella seconda colonna si fanno i raddoppi successivi partendo dal moltiplicatore 48.

1		48
2		96
4		192
8		384
16		768
32		1536
64		3072
128		

poi si eseguono le sottrazioni

$$\begin{array}{r} 103 - \underline{64} = 39 \\ 39 - \underline{32} = 7 \\ 7 - \underline{4} = 3 \\ 3 - \underline{2} = 1 \\ 1 - \underline{1} = 0 \end{array}$$

$$\underline{64} + \underline{32} + \underline{4} + \underline{2} + \underline{1} = 103$$

La somma dei numeri della colonna di destra corrispondenti ai numeri sottolineati fornisce il risultato:
 $3072 + 1536 + 192 + 96 + 48 = 4944$

Moltiplicazione russa (metodo dei raddoppi e dimezzamenti)

Sino a tempi recenti utilizzata dai contadini russi da cui il nome di moltiplicazione russa. Simile a quella egizia, essa si esegue nel modo seguente.

Si formano due colonne. In quella di sinistra si fanno i raddoppi successivi partendo dal moltiplicando 103. Nella seconda colonna si fanno i dimezzamenti successivi partendo dal moltiplicatore 48 sino al raggiungimento dell'unità. Se il numero è dispari si toglie 1 e si dimezza.

103		48	
206		24	
412		12	
824		6	
1648		3*	(3-1=2 : 2=1)
3296		1*	

La somma dei numeri della colonna di sinistra corrispondenti ai numeri dispari fornisce il risultato:
 $1648 + 3296 = 4944$

Moltiplicazione indiana e araba

Metodo denominato “procedimento degli indiani” o “via degli indiani” senza cancellazione dei risultati intermedi. Un esempio di tale calcolo si trova nel *Kitāb al fusūl fi'l hisāb al hindī* (Trattato di aritmetica indiana) composto a Damasco nel X secolo d.C. da al Uqlīdisī. Procedimento:

1) 1 0 3 moltiplicando
 4 8 moltiplicatore

2) si moltiplica 1×4 ottenendo 4 che si posiziona sulla colonna del 4 in una nuova riga sopra il moltiplicando e si barra il 4 del moltiplicatore:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 1 \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \end{array}$$

3) si moltiplica 1×8 ottenendo 8 che si posiziona sulla colonna dell'1 sopra la riga del moltiplicando e si barra l'8 del moltiplicatore:

$$\begin{array}{r} 4 \ 8 \\ 1 \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \end{array}$$

4) si barra 1 del moltiplicando e si riscrive il moltiplicatore in una riga più in basso scalando le cifre di una colonna verso destra:

$$\begin{array}{r} 4 \ 8 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \end{array}$$

5) si moltiplica 0×4 ottenendo 0 che si posiziona sulla colonna del 4 in una nuova riga sovrastante, si barra il 4 sottostante e il 4 del moltiplicatore:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \ 8 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \end{array}$$

6) si moltiplica 0×8 ottenendo 0 che si posiziona sulla colonna dell'8 nella riga sovrastante, si barra l'8 sottostante e l'8 del moltiplicatore:

$$\begin{array}{r} 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \end{array}$$

7) si barra 0 del moltiplicando e si riscrive il moltiplicatore in una riga più in basso scalando le cifre di una colonna verso destra:

$$\begin{array}{r} 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \end{array}$$

8) si moltiplica 3×4 ottenendo 12 si scrive 2 sopra lo 0 del moltiplicando, si somma il riporto 1 all'8 che si barra, si scrive 9 sopra ad esso e si barra anche il 4 del moltiplicatore:

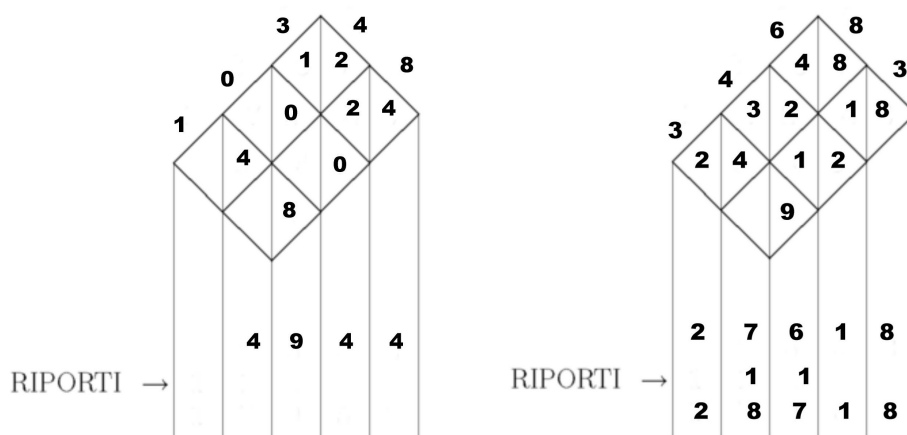
$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \ 2 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \end{array}$$

9) si moltiplica 3×8 ottenendo 24 si scrive 4 sopra al 3 del moltiplicando, si somma il riporto 2 al 2 che si barra, si scrive 4 sopra ad esso, si barra anche l'8 del moltiplicatore. Infine si barra anche il 3 del moltiplicando e i numeri restanti forniscono il risultato cercato:

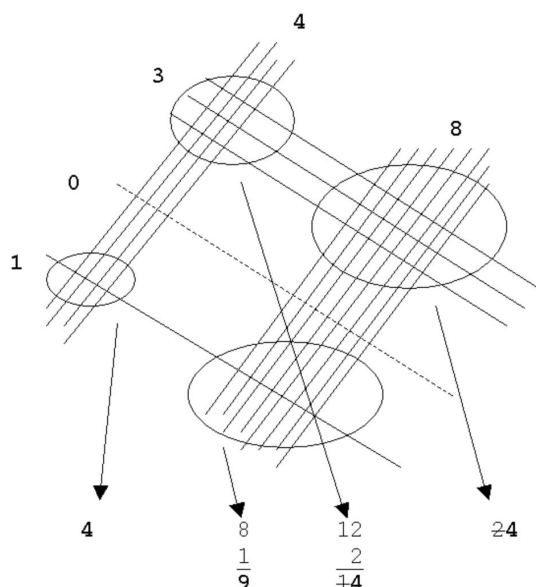
$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \ 8 \ 4 \\ 4 \ 8 \ 2 \ 4 \\ \pm \ 0 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ \hline 4 \ 9 \ 4 \ 4 \end{array}$$

Chiamata anche moltiplicazione “per graticola” o “per reticolo”. Il nome deriva dalla grata, chiamata gelosia, che veniva posta alle finestre per impedire la vista dall'esterno di ciò che succedeva all'interno della casa. Dato che il metodo presuppone l'utilizzo di un reticolo che ricorda questo tipo di grata esso stesso ha preso tale nome.

Effettuando una rotazione di 45 gradi del reticolo si ottiene una variazione pratica molto utile: le cifre delle strisce diagonali da sommare si trovano incolonnate verticalmente. Si vedano gli esempi in figura.



Si disegnano dei fasci di rette corrispondenti al valore delle cifre. Prima quelle parallele del moltiplicando 103 (una per 1, una per 0 tratteggiata e tre per 3) poi, trasversali alle prime, quelle parallele del moltiplicatore 48 (quattro per 4 e otto per 8). Il numero degli incroci fornisce il risultato. Gli incroci con la retta tratteggiata non vengono contati e bisogna fare attenzione ai riporti.



Una variante viene attribuita a Jagadguru Shankaracharya Shri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja (1884–1960), padre riconosciuto della matematica risalente ai Veda (antichissima raccolta di testi sacri della religione induista), nonché autore di *Vedic Mathematics* pubblicato postumo nel 1965.

In quest'ultima opera si trova la moltiplicazione di un numero di due cifre per 11. Per esempio $11 \times 32 = 352$ dove

- 1) il 2 di 352 è dato dal 2 di 32;
- 2) il 5 di 352 è dato dalla somma $3+2$ di 32,
- 3) il 3 di 352 è dato dal 3 di 32.

Il metodo vale anche per un numero di cifre maggiore di due moltiplicato per 11. Per esempio $11 \times 458 = 5038$ dove

- 1) l'8 di 5038 è dato dall'8 di 458;
- 2) il 3 di 5038 è dato dalla somma $5+8 = 13$ (con resto 1) di 458;
- 3) lo 0 di 5038 è dato dalla somma di $4+5 = 9+1$ (resto del punto 2) = 10 di 458;
- 4) il 5 di 5038 è dato dalla somma di 4 di 458 + 1 (resto del punto 3).

Si trova anche questa moltiplicazione equivalente alla formula $(10a+b)(10c+d) = 100ac + 10(ad+bc) + bd$. Per esempio $34 \times 23 = 782$

3	a		4	b
		×		
2	c		3	d
3×2		$3 \times 3 + 4 \times 2$		4×3
6		17		12
1		1		
7		8		

Moltiplicazione per scapezzo (o per spezzato)

Per l'esecuzione si scompongono i fattori 103 e 48 della moltiplicazione nella somma di due o più addendi a piacere, per esempio

$$103 = 100 + 3 \qquad 48 = 40 + 8$$

il prodotto si ottiene applicando alla moltiplicazione

$$(100+3) \times (40+8)$$

la proprietà distributiva rispetto all'addizione.

	100	3
40	4000	120
8	800	24

Il prodotto è dato dalla somma di $4000+800+120+24 = 4944$

Moltiplicazione per crocetta

Nota agli indiani come moltiplicazione fulminea.

$$103 \times 48 = (100+3) \times (40+8)$$

$$\begin{aligned} 40 \times 100 &= 4000 \\ 4000 + (3 \times 40) &= 4000 + 120 = 4120 \\ 4120 + (100 \times 8) &= 4120 + 800 = 4920 \\ 4920 + (3 \times 8) &= 4920 + 24 = \mathbf{4944} \end{aligned}$$

Moltiplicazione per castelluccio

Così denominata dai fiorentini e nota anche come moltiplicazione *all'indietro*.

esempio $103 \times 48 =$

1 centinaia $\times 8 = 8$ (si aggiunge 2 zeri dato che si tratta di centinaia)
1 centinaia $\times 4 = 4$

0 decine $\times 8 = 0$ (si aggiunge 1 zero dato che si tratta di decine)
0 decine $\times 4 = 0$

3 unità $\times 8 = 24 = 4$
3 unità $\times 4 = 12+2 = 14$

$$\begin{array}{r} 103 \\ \times 48 \\ \hline 4800 \\ 000 \\ 144 \\ \hline \mathbf{4944} \end{array}$$

esempio $346 \times 83 =$

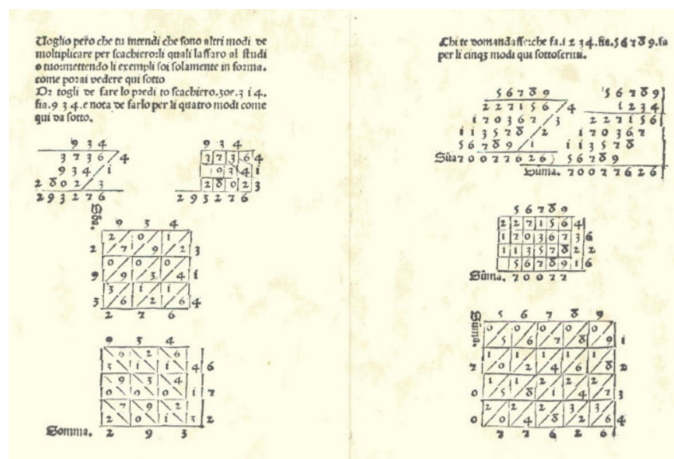
3 centinaia $\times 3 = 9$ (si aggiunge 2 zeri dato che si tratta di centinaia)
3 centinaia $\times 8 = 24$

4 decine $\times 3 = 12 = 2$ (si aggiunge 1 zero dato che si tratta di decine)
4 decine $\times 8 = 32+1 = 33$

6 unità $\times 3 = 18 = 8$
6 unità $\times 8 = 48+1 = 49$

$$\begin{array}{r} 346 \\ \times 83 \\ \hline 24900 \\ 3320 \\ 498 \\ \hline \mathbf{28718} \end{array}$$

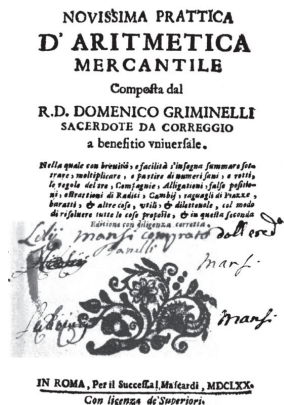
Nuovi procedimenti e varianti degli stessi sulla moltiplicazione si trovano in vari testi fra cui si ricordano *Brahmasphutasiddhanta* (628) dell'indiano Brahmagupta nel quale descrisse quattro metodi; *Līlāvati* (circa 1150) dell'indiano Bhāskara II che descrisse un procedimento che chiamò "separazioni di posizioni"; il *Talkhīs a 'māl al hisāb* (*Esposizione sommaria di operazioni aritmetiche*) (1299) di al Marrākushī, *Miftāh al Hisāb* (*Chiave dell'aritmetica*) (1427) di al Kāshī che riprende un procedimento noto già da due secoli prima e descritto nell'opera *Jamī' al hisāb bi't takht wa't turāb* (*Raccolta d'aritmetica con l'aiuto di una tavoletta e della polvere*) (1265) di Nasīr ad Dīn at Tūsī; *Kashf al Mahjub min 'ilm al ghubār* (*Rilevazioni sui segreti della scienza aritmetica*) (circa 1470) di al Qalasādī; *Larte de labbacho* (Treviso, 1478) d'autore anonimo, *Arithmetica* (Venezia, 1484) di Pietro Borghi; *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (Venezia, 1494) di Frà Luca Bartolomeo de Pacioli dove espone una raccolta organica di otto metodi di moltiplicazione (*per scacchiere, per castelluccio, per colonna, per crocetta, per quadrilatero, per gelosia, per repegio e per scapezzò*); *General trattato di numeri et misure* (1556-60) di Niccolò Tartaglia (*per rombo, per triangolo, per coppa, per diamante*); *Ganitamanjari* (1658) dell'indiano Ganesha, *Novissima prattica d'aritmetica mercantile* (Roma, 1670) di Domenico Griminelli e *Trattato aritmetico* (Venezia, 1678) di Giuseppe Maria Figatelli.



Larte de labbacho (Treviso, 1478) d'autore anonimo. Il primo manuale di matematica a stampa pubblicato al mondo.



(A sn.) *La Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venezia, 1494) di Frà Luca Bartolomeo de Pacioli. (a dx) Emissione filatelica italiana del 1994 in occasione del 500° anniversario della *Summa* (1494) di Luca Pacioli.



(A sn.) Novissima prattica d'aritmetica mercantile (1670) di Domenico Griminelli.
(A dx) Seconda edizione del Trattato aritmetico (1678) di Giuseppe Maria Figatelli (1612-1682).

Fra i molti presenti nell'opere sopra citate si riporta, come esempio, il procedimento del matematico indiano Bhāskarāchārya:

$$103 \times 48 =$$

1 0 3	1 0 3
4	8
4 1 2	8 2 4
0	0
4 1 2	8 2 4
8 2 4	
4 1 2	
4 9 4 4	

$$346 \times 83 =$$

3 4 6	3 4 6
8	3
2 4 4 8	9 1 8
3 2	1 2
2 7 6 8	1 0 3 8
1 0 3 8	
2 7 6 8	
2 8 7 1 8	

Nella prima riga si scrive due volte il moltiplicando (perché due sono le cifre del moltiplicatore). Nella terza riga si scrivono i risultati interi delle moltiplicazioni 3×6 e 3×3 saltando quello centrale. Nella quarta riga si scrive, scalando di un posto verso sinistra, il risultato della moltiplicazione centrale precedentemente saltata. Nella sesta e settima riga si scrivono i risultati delle somme parziali da destra a sinistra scalate di un posto verso sinistra. La loro somma fornisce il risultato cercato.

Verifica della correttezza del calcolo

Per la verifica della correttezza del calcolo viene spesso utilizzata la prova del nove. Essa però non è infallibile. Se la prova è negativa sicuramente si è commesso un errore nel calcolo ma se la prova è positiva non possiamo essere certi di averlo eseguito correttamente. Leonardo da Pisa meglio conosciuto come Fibonacci (1170-1250 circa) nel *Liber Abbaci* (1202) ne forniva per la prima volta una precisa giustificazione.



(A sn) Leonardo da Pisa (Fibonacci) autore del *Liber Abbaci* (1202). (A dx) Emissione filatelica francese del 1962 in onore di Blaise Pascal nel suo terzo centenario della morte. Colui che fornì un criterio di divisibilità applicabile a qualsiasi numero.

Mentre Pacioli nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (1494) esorta per l'utilizzo della prova del sette giudicata più sicura di quella del nove. Bisognerà arrivare, tuttavia, a Blaise Pascal (1623-1662) che nel *De numeris multibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis* (1650) fornirà un criterio di divisibilità applicabile a qualsiasi numero.

somma cifre primo fattore (A)	somma cifre secondo fattore (B)
somma cifre prodotto numeri (A) e (B)	somma cifre prodotto da verificare

Regola per la prova del 9.

Per esempio:

$$\begin{array}{r}
 103 \times \\
 48 = \\
 \hline
 914 + \\
 412 = \\
 \hline
 5034
 \end{array}$$

la prova del nove

1+0+3=4	4+8=12
4×3=12	1+2=3
1+2=3	5+0+3+4=12
	1+2=3

fornisce un esito positivo. In realtà il prodotto di 103x48 è 4944.

Per la prova del sette si considera la sequenza ciclica di numeri ...5 4 6 2 3 1 5 4 6 2 3 1 (data dai resti modulo 7 delle successive potenze di 10) e si procede:

- scrivendo su una riga le cifre del prodotto;
- scrivendo sotto ciascuna di esse altrettanti termini della sequenza ciclica (a partire da destra);
- moltiplicando i termini della prima riga con i corrispondenti della seconda riga;
- sommando i prodotti ottenuti;
- e, infine, calcolando il resto mod 7 del valore ottenuto.

Applicando all'esempio abbiamo:

$\begin{array}{r} 1\ 0\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \\ \hline 2\ 0\ 3 \end{array}$ $2+0+3=5$	$\begin{array}{r} 4\ 8 \\ 3\ 1 \\ \hline 12\ 8 \end{array}$ $12+8=20$
$5 \times 6 = 30$ $\begin{array}{r} 3\ 0 \\ 3\ 1 \\ \hline 9\ 0 \end{array}$ $9+0=9$ $9:7= 1.285714\dots$ $1.285714\dots-1= 0.285714\dots$ $0.285714\dots \times 7 = 2$	$\begin{array}{r} 5\ 0\ 3\ 4 \\ 6\ 2\ 3\ 1 \\ \hline 30\ 0\ 9\ 4 \end{array}$ $30+0+9+4=43$ $43:7= 6.142857\dots$ $6.142857\dots-6= 0.142857\dots$ $0.142857\dots \times 7 = 1$

Applicazione della regola del 7.

rivelando un errore nel calcolo. Inserendo il prodotto esatto 4944 si ottiene un resto concorde con quello risultante dal prodotto dei resti dei fattori 103 e 48:

$$\begin{array}{r} 4\ 9\ 4\ 4 \\ 6\ 2\ 3\ 1 \\ \hline 24\ 18\ 12\ 4 \end{array}$$

$$24+18+12+4=58$$

$$58:7= 8.285714\dots$$

$$8.285714\dots-8= 0.285714\dots$$

$$0.285714\dots \times 8 = 2$$

Bibliografia

- Bottazzini U. - Freguglia P. - Toti Rigatelli L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze, 1992
 Cajori F., *A History of mathematics*, Macmillan, New York 2nd ed., 1919
 Ifrah G., *Enciclopedia universale dei numeri*, Mondadori, Milano, 2008
 Boyer C.B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1990
 Loria G., *Le scienze esatte nell'antica greca*, Hoepli, Milano, 1914
 Lussardi L., *Moltiplicare i numeri con la geometria*, Matematicamente.it Magazine n. 138/2010 pp. 10-14
 Smith D.E., *History of Mathematics*, Ginn & Co., Boston 1923-1925 voll. I-II
<http://www.vedicmathsindia.org> matematica vedica