Luglio 1955

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, sono date la circonferenza di equazione

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$$

e le rette di equazione

$$y = -r\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Tali rette incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti A, B e C, D. Si determini sul segmento CD un punto P tale che risulti

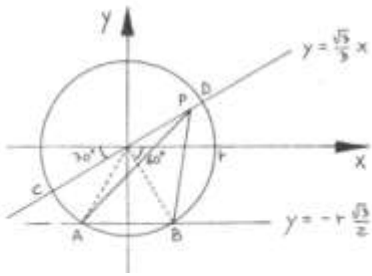
$$PA^2 + PB^2 = k \cdot AB^2$$

Essendo k un numero positivo.

Determiniamo anzitutto le coordinate dei punti A, B, C, D.

$$A \equiv \left(-\frac{r}{2}; -r\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad\qquad B \equiv \left(\frac{r}{2}; -r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C \equiv \left(-r\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{r}{2}\right) \qquad\qquad D \equiv \left(r\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{r}{2}\right)$$



Il punto P ha coordinate

$$P \equiv \left(x; \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)$$

Ed essendo vincolato fra C e D, deve essere

$$-r\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le r\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Determiniamo ora le lunghezze dei lati del triangolo PAB.

$$AB^2 = \left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

$$PA^2 = \left(x+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 + 2rx + r^2$$

$$PB^2 = \left(x-\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 + r^2$$

Quindi, applicando la relazione del problema, si ottiene

$$PA^2 + PB^2 = k \cdot AB^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 + 2rx + r^2 + \frac{4}{3}x^2 + r^2 = k\,r^2$$

$$\boxed{8x^2 + 6rx + 6r^2 - 3kr^2 = 0}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere.
Ponendo $3kr^2 = y$ si ottiene

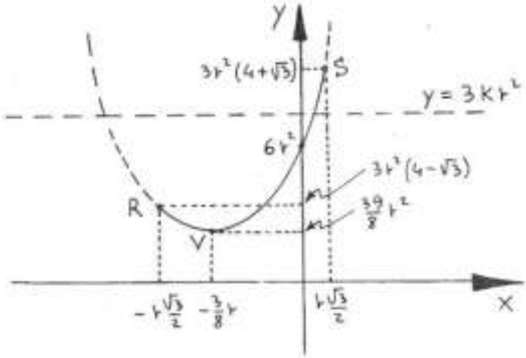
$$\begin{cases} y = 3kr^2 \\ y = 8x^2 + 6rx + 6r^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette orizzontali (con k > 0) e una parabola con vertice nel punto

$$V \equiv \left(-\frac{3}{8}r; \frac{39}{8}r^2\right)$$

E concavità verso l'alto. I punti estremi dell'arco utile di parabola hanno coordinate

$$R \equiv \left(-r\frac{\sqrt{3}}{2}; 3r^2\left(4-\sqrt{3}\right)\right) \qquad S \equiv \left(r\frac{\sqrt{3}}{2}; 3r^2\left(4+\sqrt{3}\right)\right)$$



(il grafico non è in scala per ottenere una migliore visibilità della situazione).

Determiniamo per quali valori del parametro k la retta del fascio passa per V, R, S.

$$V \quad \rightarrow \quad \frac{39}{8}r^2 = 3kr^2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{13}{8}$$

$$R \quad \rightarrow \quad 3r^2\left(4-\sqrt{3}\right) = 3kr^2 \quad \rightarrow \quad k = 4-\sqrt{3}$$

$$S \quad \rightarrow \quad 3r^2\left(4+\sqrt{3}\right) = 3kr^2 \quad \rightarrow \quad k = 4+\sqrt{3}$$

Si ha quindi