

Esame di stato di liceo scientifico maxisperimentazione brocca

Tema di fisica, anno 2010

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle elettroni.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di $2,1 \text{ eV}$, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi.

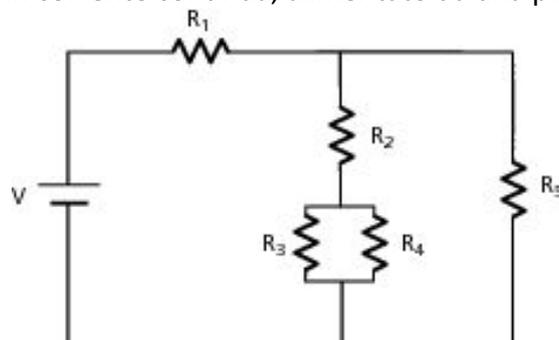
Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Secondo tema

Alla fine del Settecento il medico bolognese Galvani propose una sua interpretazione sull'origine della corrente elettrica. L'ipotesi di Galvani non fu, però, accettata dal fisico Alessandro Volta, dell'Università di Pavia, che propose un'ipotesi alternativa e costruì nel 1800 il primo generatore elettrico in corrente continua: la cosiddetta pila di Volta. Nell'Ottocento seguirono poi le ricerche dei fisici tedeschi Ohm e Kirchhoff che scoprirono le leggi dei circuiti elettrici. Il candidato:

- a) spieghi il principio di funzionamento della pila di Volta;
- b) spieghi il significato di circuito elettrico e si soffermi sulla natura e le unità di misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua;
- c) descriva teoricamente e graficamente come si collocano in un circuito elettrico gli strumenti di misura amperometro e voltmetro, con le necessarie considerazioni riguardanti la resistenza interna di questi strumenti confrontata con le resistenze presenti nel circuito;
- d) spieghi perché in ogni misura è necessario scegliere nello strumento la portata minima possibile;
- e) dato il seguente circuito in corrente continua, alimentato da una pila da $4,5 \text{ V}$, calcoli:



- l'intensità della corrente erogata dalla pila;
- la d.d.p. ai capi di R_1 e di R_3 ;
- l'energia dissipata, per effetto Joule, da R_1 e da R_3 in 2 secondi.

I valori delle resistenze elettriche sono: $R_1 = 1,5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$

Svolgimento tema 1

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.

Nei primi anni del '900 l'ipotesi quantistica di Planck, il concetto di fotone di Einstein e le evidenze sperimentali dell'effetto Compton avevano indotto gli scienziati a interpretare la radiazione elettromagnetica come formata da un insieme di particelle in movimento alla velocità c (nel vuoto) e in grado di trasportare energia ($E = hf$) e quantità di moto ($p = hf/c = h/\lambda$). Questo comportamento corpuscolare della luce riusciva a spiegare alcuni importanti fenomeni non interpretabili col modello ondulatorio, quali l'emissione di energia da parte del corpo nero, l'effetto fotoelettrico e la diffusione dei raggi X da parte di un metallo (effetto Compton). Dato che la luce, comunque, continua a manifestare la sua natura ondulatoria nei fenomeni dell'interferenza e della diffrazione, si arrivò a parlare di dualismo onda-corpuscolo per la radiazione: ciò sancisce la doppia natura della luce, corpuscolare nelle interazioni microscopiche con la materia, ondulatoria nei fenomeni macroscopici quali, per esempio, l'interferenza e la diffrazione.

Nel 1923 un giovane fisico francese, Louis de Broglie, avanzò un'ipotesi rivoluzionaria: per una sorta di simmetria, ipotizzò che anche per la materia, e in particolare per le particelle microscopiche, valesse il dualismo onda-corpuscolo. Secondo de Broglie, le particelle di materia continuano a manifestare la loro natura corpuscolare nei fenomeni macroscopici, ma rivelano un carattere ondulatorio nelle interazioni microscopiche. Partendo dalla quantità di moto di un fotone:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

de Broglie ipotizzò che l'onda associata alla particella dovesse avere lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

detta lunghezza d'onda di de Broglie.

La lunghezza d'onda di de Broglie dipende dalla velocità della particella, per esempio per un elettrone in moto alla velocità di $1,0 \cdot 10^6$ m/s, la lunghezza d'onda di de Broglie è:

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot \left(1,0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} \cong 7,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

paragonabile con le dimensioni di un atomo.

Ripetendo il calcolo per un oggetto macroscopico, per esempio un proiettile di 5,0 g alla velocità di 250 m/s, si ottiene:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \cdot \left(2,5 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} \cong 5,3 \cdot 10^{-33} \text{ m}$$

valore così piccolo da non essere misurabile, per cui possiamo ritenere trascurabile la natura ondulatoria della materia nei fenomeni macroscopici, che quindi possono essere ancora descritti con le leggi della Meccanica Classica.

L'ipotesi di de Broglie fu confermata sperimentalmente dall'esperimento di Davisson e Germer: dato che la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone è dello stesso ordine di grandezza della distanza tra gli ioni del reticolo cristallino di un metallo, Davisson e Germer mandarono un fascio di elettroni contro un cristallo di nichel e osservarono su uno schermo rivelatore la tipica figura di diffrazione di un'onda, spiegabile solo ammettendo la correttezza dell'ipotesi di de Broglie.

Il comportamento ondulatorio degli elettroni si manifesta quando essi sono costretti a muoversi in uno spazio dalle dimensioni paragonabili a quelle della loro lunghezza d'onda di de Broglie. Un esempio notevole è dato dal moto dell'elettrone in una scatola unidimensionale di lunghezza L . Si assimila, in questo caso, lo spazio unidimensionale a una corda tesa fissata agli estremi, e si ammette che la funzione d'onda che rappresenta l'elettrone si annulli in tali punti. Applicando la condizione di stazionarietà dell'onda, vale a dire imponendo che nello spazio L sia contenuto un numero intero di semilunghezze d'onda:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

ed essendo:

$$\lambda = \frac{h}{m_e v}$$

si ottiene, uguagliando le espressioni di λ :

$$\frac{h}{m_e v} = \frac{2L}{n}$$

da cui

$$v = n \frac{h}{2m_e L}$$

Dato che l'elettrone non interagisce con altre particelle, possiamo supporre che la sua energia sia tutta cinetica:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 \Rightarrow E_n = n^2 \frac{h^2}{8m_e L^2}$$

Dalla formula ottenuta emerge che l'elettrone può assumere solo alcuni ben determinati valori dell'energia, che pertanto risulta quantizzata. Inoltre, il valore minimo dell'energia ($n = 1$) è diverso da zero, il che implica che l'elettrone non può mai stare fermo. I risultati ottenuti sono completamente diversi da quelli che potremmo ottenere classicamente, cioè considerando l'elettrone come una particella: le previsioni classiche ci dicono che l'elettrone può assumere un qualsiasi valore dell'energia e che, alla minima energia, dovrebbe rimanere in quiete.

Un'altra applicazione di notevole importanza è data dalla spiegazione della teoria di Bohr sulla struttura dell'atomo e sugli stati stazionari. Secondo la teoria di Bohr l'elettrone va pensato come una particella in orbita circolare attorno al nucleo atomico, secondo orbite tali da soddisfare l'ipotesi di quantizzazione del momento angolare:

$$L_n = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2 \dots$$

a ciascuna di queste orbite corrisponde un determinato livello energetico, e l'elettrone può orbitare per un tempo indefinito senza irradiare energia. Questa teoria descriveva il comportamento dell'elettrone senza però avere un valido fondamento scientifico.

Considerando la natura ondulatoria dell'elettrone, si può spiegare la stazionarietà dell'orbita ammettendo che l'onda che rappresenta l'elettrone sia stazionaria, per cui applicando la condizione di stazionarietà dell'onda, si pone la lunghezza $2\pi r$ dell'orbita uguale a un numero intero di lunghezze d'onda di de Broglie (questa volta la corda va considerata chiusa, cioè con gli estremi coincidenti):

$$2\pi r = n\lambda \quad n = 1, 2 \dots$$

da cui si ottiene

$$\lambda = \frac{2\pi r}{n}$$

sostituendo nella relazione di de Broglie si ha:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow mv = n \frac{h}{2\pi r} \Rightarrow mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

mvr è il momento angolare dell'elettrone che, in base alla formula, risulta quantizzato proprio come ipotizzato da Bohr.

2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.

Il punto di partenza della meccanica ondulatoria è proprio il riconoscimento che il duplice aspetto ondulatorio e corpuscolare è una legge di natura che riguarda sia la radiazione che le particelle. In particolare, per descrivere il comportamento ondulatorio di una particella è necessario introdurre opportune grandezze matematiche. Nel 1926 il fisico austriaco Schroedinger propose un'equazione, detta appunto equazione di Schroedinger, le cui soluzioni, dette funzioni d'onda (simbolo ψ), descrivono il comportamento di una particella quantistica e la sua evoluzione nello spazio e nel tempo. La proprietà più importante della funzione d'onda fu messa in evidenza pochi anni dopo dal fisico tedesco Born: egli stabilì

che il modulo quadro della funzione d'onda è legato alla probabilità che una data particella occupi una certa regione dello spazio, centrata su un punto $P(x,y,z)$, in un dato intervallo di tempo. Più precisamente tale probabilità è data dalla relazione:

$$P = |\psi_{(x,y,z,t)}|^2 \Delta V \cdot \Delta t$$

pertanto il modulo quadro di ψ indica una probabilità per unità di volume e per unità di tempo (densità di probabilità).

Questa interpretazione probabilistica, quindi, sancisce l'impossibilità di conoscere, per esempio, l'esatta posizione di un elettrone all'interno di un atomo; ciò che si può stabilire, conoscendo la funzione d'onda, è solo la probabilità di trovarlo in un dato momento in una certa regione dello spazio. Viene così a cadere quel determinismo tipico della meccanica classica, in base al quale, risolvendo le equazioni del moto, è possibile stabilire con esattezza l'evoluzione di un sistema fisico. In meccanica quantistica, invece, le soluzioni dell'equazione di Schroedinger forniscono i possibili stati secondo cui può evolvere il sistema, di ciascuno dei quali è possibile saperne la probabilità.

Un altro importante principio su cui si basa la meccanica ondulatoria è il principio di indeterminazione di Heisenberg. In meccanica classica è possibile stabilire contemporaneamente con precisione, mediante opportune misure affette, al più, da errore sperimentale, la posizione e la quantità di moto di una particella. In meccanica quantistica, invece, ogni misura volta a stabilire con una certa precisione la posizione finisce con l'aumentare l'indeterminazione sulla conoscenza della quantità di moto, o viceversa. Addirittura la conoscenza precisa sulla posizione rende del tutto indeterminata la conoscenza della quantità di moto. Questo fatto è legato alla natura ondulatoria delle particelle: per localizzarle, è necessario interagire con esse, per esempio illuminandole. Ciò provoca una indeterminazione Δx sulla conoscenza della posizione comparabile con la lunghezza d'onda λ della luce; nello stesso tempo, la quantità di moto trasportata dai fotoni varierà la quantità di moto della particella, per effetto Compton, di una quantità Δp . Heisenberg notò che per aumentare la precisione sulla conoscenza della posizione è necessario usare luce di lunghezza d'onda sempre più piccola, col risultato, però, di aumentare l'indeterminazione sulla quantità di moto. In altre parole, il prodotto tra le due indeterminazioni non può risultare inferiore a una quantità piccola ma finita, generalmente posta uguale a $h/4\pi$:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

questa è la relazione con cui è generalmente espresso il principio di indeterminazione di Heisenberg. Il principio di indeterminazione sussiste anche tra altre coppie di grandezze, quali l'energia e il tempo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Come già in parte esposto precedentemente, il dualismo onda-corpuscolo è una legge di natura in base alla quale sia la radiazione che la materia presentano un duplice aspetto, ondulatorio in alcuni fenomeni e corpuscolare in altri. Questi due aspetti sono da considerare come complementari, nel senso che quando in un fenomeno la luce o un elettrone rivelano, per esempio, un aspetto corpuscolare non possono contemporaneamente manifestare anche quello ondulatorio o viceversa.

La teoria elettromagnetica di Maxwell stabilisce che la luce è una particolare onda elettromagnetica; tra le principali proprietà, è bene ricordare che, secondo Maxwell, un'onda elettromagnetica viaggia nel vuoto a una velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ trasportando un'energia per unità di volume legata al quadrato dei campi

elettrico e magnetico:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{max}^2 = \frac{B_{max}^2}{2\mu_0}$$

inoltre l'onda trasporta una quantità di moto data dalla relazione $p = E/c$. Le proprietà ondulatorie descritte da Maxwell descrivono correttamente i fenomeni di riflessione, rifrazione, interferenza, diffrazione e polarizzazione della luce.

Successivamente, per spiegare i fenomeni di interazione tra luce e materia, fu introdotto il concetto di fotone conferendo alla luce un carattere corpuscolare. I due aspetti, come già detto, sono complementari; per rendere, in qualche modo, compatibile il fotone con il carattere ondulatorio della radiazione si ipotizzò che esso sia il risultato della sovrapposizione di un gran numero di onde tali da dare interferenza costruttiva in una zona ristretta dello spazio, che è quella in cui è collocata la particella, e distruttiva altrove. Tale configurazione dà luogo a un pacchetto d'onda di estensione limitata in moto alla velocità c . Il fotone, quindi, non va inteso come una particella puntiforme in movimento, bensì come un impulso viaggiante localizzato ma avente tuttavia una certa estensione.

Per ciò che riguarda il comportamento ondulatorio delle particelle, va ribadito che il carattere ondulatorio si manifesta quando la particella è costretta a muoversi in uno spazio dalle dimensioni comparabili con quelle della sua lunghezza d'onda di de Broglie, cosa che avviene, per esempio, agli elettroni all'interno di un atomo o nella loro diffrazione attraverso un cristallo. In tutti gli altri casi, quali, ad esempio, un elettrone in moto in un campo elettrico o magnetico, le particelle seguono le leggi della meccanica classica o, tutt'al più, relativistica.

4. Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di $2,1 \text{ eV}$, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Per calcolare la minima lunghezza d'onda di de Broglie associata agli elettroni emessi per effetto fotoelettrico, è necessario conoscere la loro quantità di moto, a sua volta ricavabile dall'energia cinetica in base alla relazione $K = p^2/2m$. Per ricavare l'energia cinetica massima degli elettroni estratti possiamo

ricorrere all'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico:

$$\begin{aligned} K_{max} &= E_{fotone} - W_e = \frac{hc}{\lambda} - W_e \\ &= \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{5,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - 2,1 \text{ eV} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} \\ &= 3,98 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,62 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6,2 \cdot 10^{-20} \text{ J} \end{aligned}$$

Essendo $K_{max} = p_{max}^2/2m$, si ottiene

$$p_{max} = \sqrt{2mK_{max}} = \sqrt{2 \cdot (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (6,2 \cdot 10^{-20} \text{ J})} \cong 3,4 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

mediante la relazione di de Broglie ricaviamo la lunghezza d'onda richiesta:

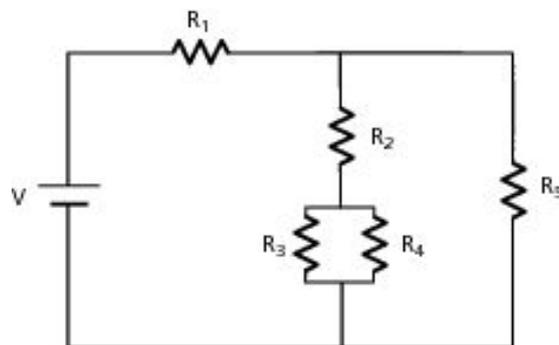
$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{3,4 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cong 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Nell'esecuzione dei calcoli si è preferito considerare le costanti con tre cifre significative e sono stati considerati significativi gli zeri finali di λ , ciò per dare maggior senso logico e coerenza ai passaggi svolti e ai risultati ottenuti.

Svolgimento secondo tema

Alla fine del Settecento il medico bolognese Galvani propose una sua interpretazione sull'origine della corrente elettrica. L'ipotesi di Galvani non fu, però, accettata dal fisico Alessandro Volta, dell'Università di Pavia, che propose un'ipotesi alternativa e costruì nel 1800 il primo generatore elettrico in corrente continua: la cosiddetta pila di Volta. Nell'Ottocento seguirono poi le ricerche dei fisici tedeschi Ohm e Kirchhoff che scoprirono le leggi dei circuiti elettrici. Il candidato:

- f) spieghi il principio di funzionamento della pila di Volta;
- g) spieghi il significato di circuito elettrico e si soffermi sulla natura e le unità di misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua;
- h) descriva teoricamente e graficamente come si collocano in un circuito elettrico gli strumenti di misura amperometro e voltmetro, con le necessarie considerazioni riguardanti la resistenza interna di questi strumenti confrontata con le resistenze presenti nel circuito;
- i) spieghi perché in ogni misura è necessario scegliere nello strumento la portata minima possibile;
- j) dato il seguente circuito in corrente continua, alimentato da una pila da 4,5 V, calcoli:



- l'intensità della corrente erogata dalla pila;
- la d.d.p. ai capi di R_1 e di R_3 ;
- l'energia dissipata, per effetto Joule, da R_1 e da R_3 in 2 secondi.

I valori delle resistenze elettriche sono: $R_1 = 1,5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$

a) Il candidato spieghi il principio di funzionamento della pila di Volta

La pila di Volta è il primo esempio nella storia della scienza di generatore di forza elettromotrice. Essa è costituita da una successione di coppie di dischi di rame e zinco alternati da un panno imbevuto di una soluzione elettrolitica. Per comprenderne il principio di funzionamento, è bene ricordare ciò che lo stesso Volta aveva scoperto pochi anni prima, e cioè che al contatto fra due metalli diversi, alla stessa temperatura, si genera una differenza di potenziale caratteristica della natura dei metalli (effetto Volta). Oggi interpretiamo questo fenomeno ammettendo che gli elettroni liberi del metallo prossimi alla sua superficie hanno la proprietà di abbandonare il metallo se a essi viene conferita dall'esterno una piccola quantità di energia (generalmente pochi eV) detta lavoro di estrazione. Dividendo il lavoro di estrazione per la carica dell'elettrone, si ottiene una grandezza caratteristica di ogni metallo detta potenziale di estrazione:

$$V_e = \frac{W_e}{e}$$

Quando si mettono a contatto due metalli con diverso potenziale di estrazione, nella zona del contatto si genera una differenza di potenziale pari alla differenza dei potenziali di estrazione: ciò si verifica perché il

metallo con maggior potenziale di estrazione attira più fortemente, nella zona della giunzione, gli elettroni di conduzione dell'altro metallo; in tal modo, alcuni elettroni passano dal metallo con minor potenziale d'estrazione all'altro, creando così una d.d.p. pari proprio alla differenza dei potenziali di estrazione. Nel caso della coppia zinco – rame, ad esempio, si ha che:

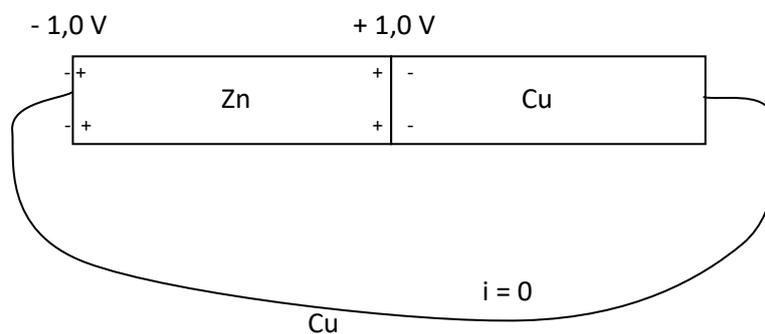
$$V_e^{Zn} = 3,4 V \quad , \quad V_e^{Cu} = 4,4 V \quad \Rightarrow \quad V_{Zn} - V_{Cu} = 1,0 V$$

avendo ceduto elettroni, lo zinco si porta a un potenziale maggiore del rame.



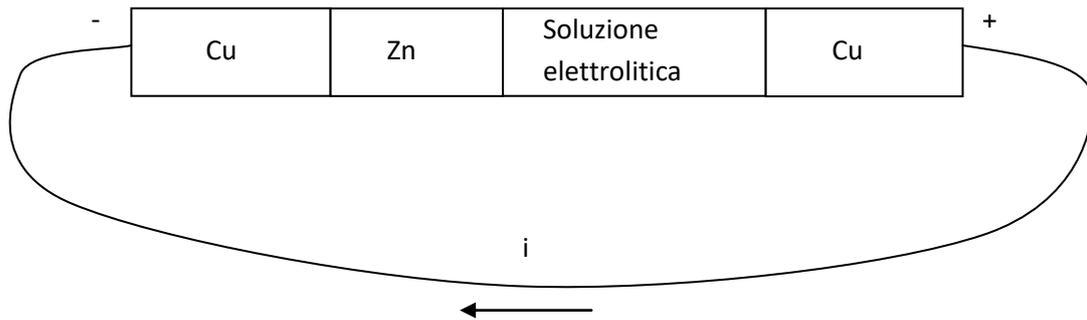
$$\Delta V = 1,0 V$$

Nonostante gli estremi del sistema di conduttori si trovino a potenziali diversi, il sistema non può fungere da generatore di f.e.m. perché, unendo con un filo conduttore gli estremi nella nuova giunzione rame-zinco si verrebbe a creare una nuova d.d.p. di segno opposto che annullerebbe la precedente. Tutto ciò a patto che le due giunzioni siano alla stessa temperatura.



In altre parole, tra due metalli della stessa natura, estremi di una catena formata da più metalli diversi, non si genera alcuna differenza di potenziale: pertanto in una catena chiusa formata da più metalli alla stessa temperatura non si può avere passaggio di corrente.

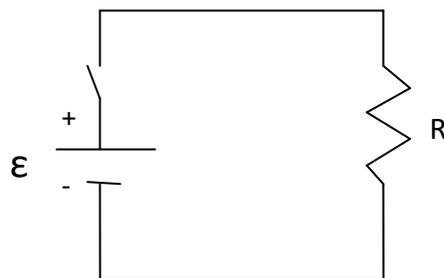
Volta tuttavia scoprì che tra due metalli della stessa natura si produce una differenza di potenziale se essi sono gli estremi di una catena della quale fanno parte due metalli diversi a contatto con una soluzione elettrolitica. Riprendendo l'esempio precedente, se si interpone nel sistema una soluzione elettrolitica, le reazioni chimiche che avvengono nella soluzione faranno sì che collegando gli estremi del sistema con un filo metallico si assista a un passaggio continuo di corrente.



Nel caso della pila di Volta, ogni singolo elemento, chiamato elemento voltaico, è composto di due elettrodi, uno bimetallico rame-zinco e l'altro di rame, entrambi a contatto con una soluzione molto diluita di acido solforico. Da un punto di vista chimico, lo zinco a contatto con la soluzione elettrolitica subisce una reazione di ossidazione e manda in soluzione ioni Zn^{++} , assumendo così una carica negativa dovuta agli elettroni liberati dagli atomi di zinco. Contemporaneamente sul rame avviene una reazione di riduzione, dovuta al fatto che gli ioni idrogeno H^+ presenti nella soluzione sottraggono ognuno un elettrone agli atomi del rame, che così si carica positivamente. La differenza di potenziale che si produce a causa delle due reazioni è di circa 1,1 V. Quando i due elettrodi saranno collegati da un filo di rame, si osserverà un flusso di elettroni dallo zinco al rame, i quali giunti a contatto con la soluzione provocheranno la riduzione degli ioni H^+ a idrogeno molecolare. Per ogni 2 elettroni che fluiscono nel filo dallo zinco al rame, l'elettrodo di zinco manda in soluzione uno ione Zn^{++} ripristinando la carica negativa perduta, e così via. In questo modo si stabilisce un passaggio continuo di corrente dall'elettrodo positivo di rame a quello negativo di zinco. Collegando in serie un numero arbitrario di elementi, è possibile ottenere un generatore di f.e.m. di valore multiplo della f.e.m. del singolo elemento. Il nome di pila dato al generatore ideato da Volta è dovuto proprio al fatto che i vari elementi erano disposti verticalmente l'uno sull'altro.

b) Il candidato spieghi il significato di circuito elettrico e si soffermi sulla natura e le unità di misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua

Un circuito elettrico in corrente continua è costituito essenzialmente da un generatore di forza elettromotrice costante collegato mediante fili conduttori a uno o più utilizzatori (resistenze). Un interruttore permette di aprire o chiudere il circuito.



Le grandezze e le rispettive unità di misura che caratterizzano un circuito sono:

1. La tensione elettrica, o differenza di potenziale (d.d.p.), che è una grandezza scalare così definita: data una carica elettrica Q e presi due punti A e B dello spazio, si definisce differenza di potenziale tra i punti A e B l'opposto del lavoro compiuto dalle forze elettriche per spostare una carica di prova q , positiva e tale che $q \ll Q$, dal punto A al punto B fratto la carica di prova q stessa:

$$V_B - V_A = - \frac{L_{A,B}}{q}$$

Ricordando che il lavoro $L_{A,B}$ coincide con la differenza di energia potenziale $U_A - U_B$, si ha altresì:

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q}$$

In un circuito elettrico, la d.d.p. ai capi di una resistenza è legata alla corrente che la attraversa dalla prima legge di Ohm, secondo la quale queste due grandezze sono direttamente proporzionali:

$$V = Ri$$

La differenza di potenziale si misura in volt (V):

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

quindi tra due punti dello spazio esiste una d.d.p. di 1V se le forze elettriche compiono un lavoro di 1J per spostare da A a B una carica di 1C.

2. La forza elettromotrice del generatore (f.e.m.), che può essere definita come la d.d.p. misurata ai capi del generatore a morsetti aperti, cioè quando nel circuito non passa corrente. Il passaggio di corrente (circuito chiuso), infatti, provoca, a causa della resistenza interna di un generatore, un abbassamento della d.d.p. ai capi del generatore: quando questo effetto è trascurabile, il generatore è detto ideale.

La f.e.m. può essere anche definita come il lavoro compiuto dal campo elettromotore, presente all'interno del generatore, per trasportare una carica q positiva dal polo negativo a quello positivo, fratto la carica stessa:

$$f.e.m. = \frac{W}{q}$$

Essendo una differenza di potenziale, anche la f.e.m. si misura in volt.

3. L'intensità di corrente, che è una grandezza scalare definita dalla relazione

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

dove Δq è la quantità di carica che attraversa nel tempo Δt una qualunque sezione perpendicolare di un conduttore sottoposto a una certa d.d.p..

Il verso convenzionale della corrente è sempre quello che va da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale minore, cioè lo stesso del campo elettrico, indipendentemente dal segno dei portatori mobili di carica. Per esempio, nei conduttori metallici i portatori di corrente sono elettroni che si muovono in senso opposto al campo elettrico e quindi da potenziali minori verso potenziali maggiori. Nelle soluzioni ioniche, invece, i portatori di corrente sono ioni di entrambi i segni che si muoveranno in versi discordi.

L'intensità di corrente si misura in ampere (A)

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

quindi si dice che una corrente ha un'intensità di 1A se una qualunque sezione perpendicolare del conduttore è attraversata nel tempo di 1s da una quantità di carica di 1C.

E' da osservare che, con la scoperta dell'effetto magnetico della corrente, è stata data una nuova definizione dell'ampere:

dati due fili paralleli infinitamente lunghi e posti nel vuoto alla distanza di 1 m, percorsi dalla stessa corrente, si dice che la corrente ha un'intensità di 1 A se ciascun filo interagisce con un elemento di

lunghezza di 1 m dell'altro con una forza pari a $2 \cdot 10^{-7}$ N. Questa definizione si basa sulla legge elettrodinamica di Ampere:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} \Delta l$$

che stabilisce il modulo della forza per unità di lunghezza di interazione tra 2 fili paralleli indefiniti, percorsi da correnti i_1 e i_2 e posti, nel vuoto, alla distanza d . La costante μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, il cui valore è $4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A.

4. La resistenza elettrica, definita, in base alla prima legge di Ohm, come il rapporto tra la tensione applicata ai capi del conduttore e l'intensità di corrente che vi scorre:

$$R = \frac{V}{i}$$

Essa, in pratica, rappresenta l'opposizione offerta dal conduttore al passaggio della corrente. La resistenza dipende dalla natura e la geometria del conduttore, infatti per un conduttore cilindrico di lunghezza l e sezione S vale la seconda legge di Ohm in base alla quale la resistenza è direttamente proporzionale a l e inversamente proporzionale a S , e inoltre dipende dalla natura del conduttore mediante un parametro ρ detto resistività:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

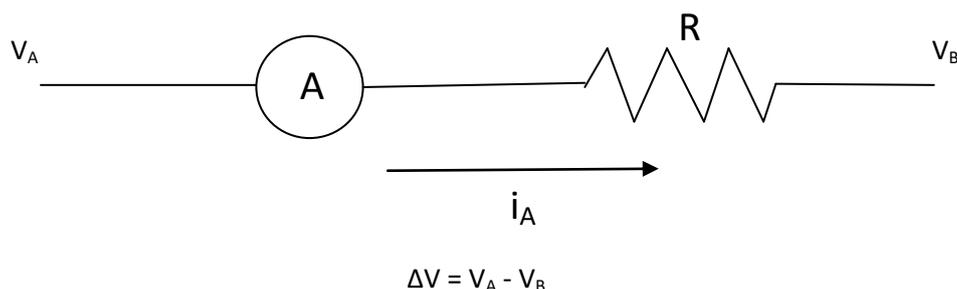
La resistenza elettrica si misura in ohm (Ω):

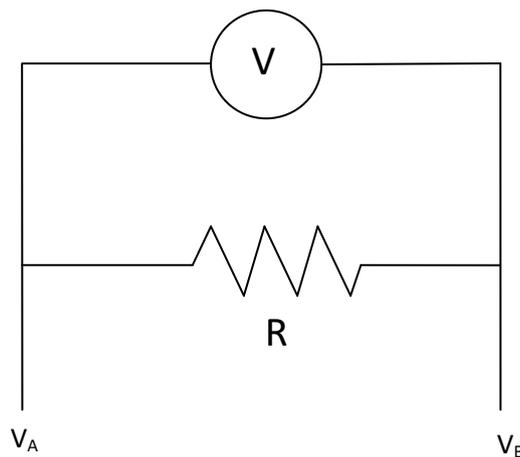
$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

si dice che un conduttore ha resistenza di 1Ω quando, sottoposto a una d.d.p. di 1V, è attraversato da una corrente di intensità 1A.

c) Il candidato descriva teoricamente e graficamente come si collocano in un circuito elettrico gli strumenti di misura amperometro e voltmetro, con le necessarie considerazioni riguardanti la resistenza interna di questi strumenti confrontata con le resistenze presenti nel circuito

L'amperometro e il voltmetro sono gli strumenti con i quali è possibile misurare rispettivamente la corrente che attraversa una certa resistenza e la tensione alla quale è sottoposta. Per effettuare la misura, l'amperometro dev'essere sempre posto in serie alla resistenza, in modo che sia attraversato dalla stessa corrente, mentre il voltmetro dev'essere posto in parallelo, in modo che sia sottoposto alla stessa differenza di potenziale.





$$\Delta V_V = V_A - V_B$$

Tutte le misure ottenibili con questi strumenti sono affette da un errore sistematico causato dalla loro resistenza interna. Per rendere minimo questo errore, è necessario che la resistenza interna r_A dell'amperometro sia molto minore della resistenza R , infatti, dalla prima legge di Ohm e ricordando che due resistenze in serie sono equivalenti a un'unica resistenza di valore pari alla loro somma, si ha:

$$i_A = \frac{\Delta V}{R + r_A} = \frac{\frac{\Delta V}{R}}{1 + \frac{r_A}{R}} = \frac{i}{1 + \frac{r_A}{R}}$$

i_A è la corrente misurata dall'amperometro mentre i è la corrente che attraversa R in assenza dell'amperometro. Dalla formula emerge che i_A è sempre minore di i , quindi l'errore sistematico dello strumento è sempre per difetto. Tuttavia, se $r_A \ll R$ l'errore è trascurabile e possiamo identificare, entro i limiti dell'errore sperimentale, la misura fornita dall'amperometro con la corrente che attraversa la resistenza.

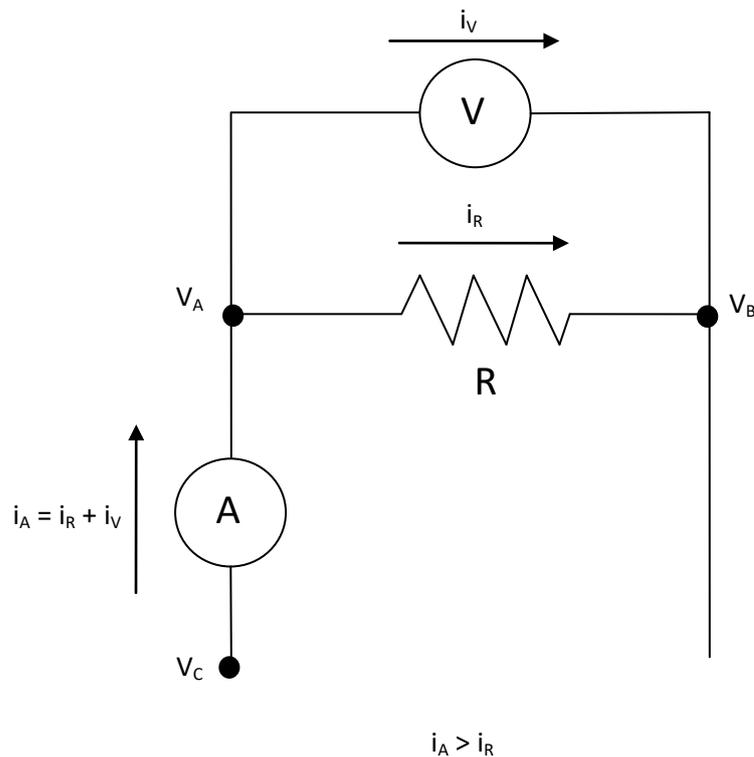
Un discorso simile può essere fatto per il voltmetro, solo che questa volta il voltmetro dovrà avere una resistenza interna r_V molto maggiore di R , infatti considerando la resistenza equivalente del parallelo formato dal voltmetro e dalla resistenza si ha:

$$\Delta V_V = \frac{R r_V}{R + r_V} i = \frac{R i}{1 + \frac{R}{r_V}} = \frac{\Delta V}{1 + \frac{R}{r_V}}$$

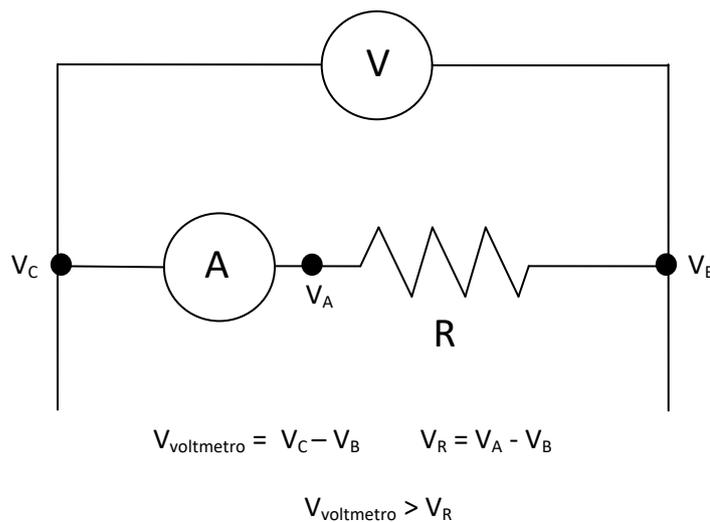
ΔV_V è la d.d.p. misurata dal voltmetro, mentre ΔV è la d.d.p. ai capi di R in assenza dello strumento. Anche in questo caso l'errore sistematico agirà per difetto e diventerà trascurabile solo se $r_V \gg R$.

La situazione si complica se si volessero effettuare contemporaneamente misure di tensione e di corrente, inserendo assieme i due strumenti. In questo caso, gli strumenti si influenzano reciprocamente a seconda di come sono posizionati reciprocamente. Esistono due possibili casi:

1. Voltmetro a valle dell'amperometro. In questa configurazione il voltmetro è in parallelo a R e ne misura correttamente la tensione, nei limiti dell'errore sistematico descritto in precedenza, mentre l'amperometro misura la somma delle correnti circolanti in R e nel voltmetro. La corrente misurata dall'amperometro è pertanto sistematicamente maggiore di quella circolante in R , tuttavia se $r_V \gg R$ la corrente circolante nel voltmetro è minima e l'errore può essere ritenuto trascurabile.



2. Voltmetro a monte dell'ampmetro. Questa volta l'ampmetro è direttamente in serie a R ed esegue una corretta valutazione della corrente. Il voltmetro, invece, misura la tensione ai capi del sistema formato da R e dall'ampmetro, dandoci quindi un valore maggiore di quello reale. Anche in questo caso la condizione $r_A \ll R$ rende trascurabile questo errore.



I collegamenti descritti sono sovente usati in laboratorio per eseguire misure di resistenze incognite (metodo voltamperometrico).

d) Il candidato spieghi perché in ogni misura è necessario scegliere nello strumento la portata minima possibile

Come tutti gli strumenti di misura, anche amperometro e voltmetro sono caratterizzati da una portata e una sensibilità. La portata di questi strumenti può essere facilmente regolata agendo su un'apposita manopola. Inizialmente, non conoscendo i valori in gioco, è bene porre la portata su un valore elevato, in modo da evitare danni agli strumenti. Una volta individuato il campo di valori da misurare, è bene regolare la portata sul più piccolo valore possibile, in modo da rendere minimo l'errore sperimentale di misura. Infatti gli errori di misura ottenuti con gli strumenti elettrici sono proporzionali al cosiddetto valore di fondo scala (cioè la portata) secondo un parametro, espresso in percentuale, legato alla qualità dello strumento chiamato classe. In pratica l'errore si ottiene trasformando la classe C da percentuale in forma unitaria e moltiplicando per il valore di fondo scala X_{fs} :

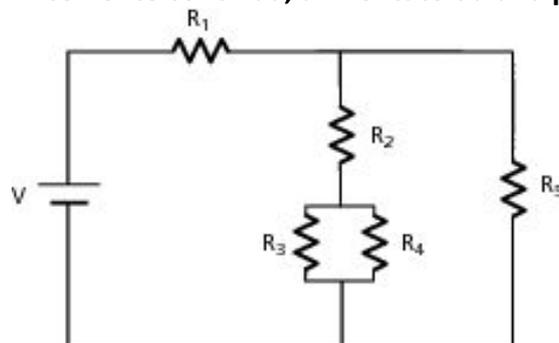
$$\Delta X = \frac{C}{100} X_{fs}$$

Così, per esempio, se la classe di un voltmetro è 0,5 e il valore di fondo scala è 100 V, l'errore da attribuire a ogni misura è:

$$\Delta X = \frac{0,5}{100} 100 V = 0,5 V$$

E' evidente che una portata inappropriata può portare a errori di misura più elevati.

e) Dato il seguente circuito in corrente continua, alimentato da una pila da 4,5 V, calcoli:



- l'intensità della corrente erogata dalla pila;
- la d.d.p. ai capi di R_1 e di R_3 ;
- l'energia dissipata, per effetto Joule, da R_1 e da R_3 in 2 secondi.

I valori delle resistenze elettriche sono: $R_1 = 1,5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$

Per rispondere alle varie domande, è necessario semplificare la rete di resistenze presenti nel circuito fino a determinare la resistenza equivalente. A tal fine, è bene ricordare che due resistenze si dicono collegate in serie quando sono attraversate dalla stessa corrente, mentre si dicono collegate in parallelo quando sono sottoposte alla stessa d.d.p. Le formule per ricavare la resistenza equivalente sono:

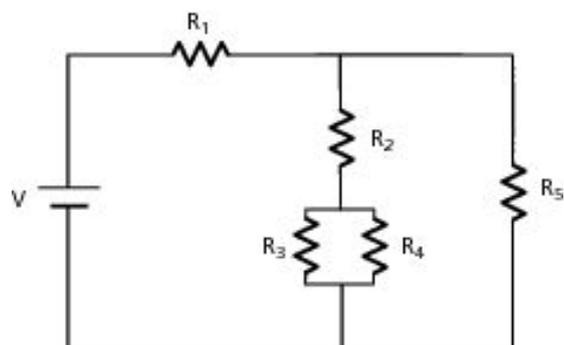
1. per le resistenze in serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

2. per le resistenze in parallelo

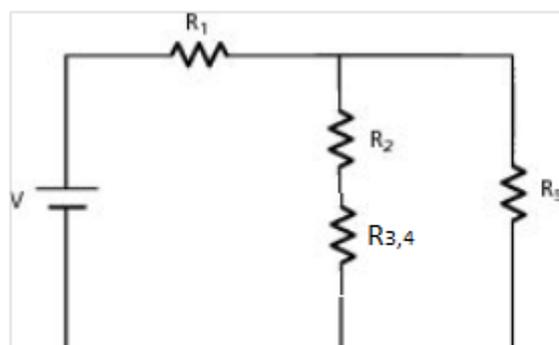
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Partendo dalla maglia più interna e applicando opportunamente le formule precedenti, è possibile ridurre la rete di resistenze a un'unica resistenza equivalente.



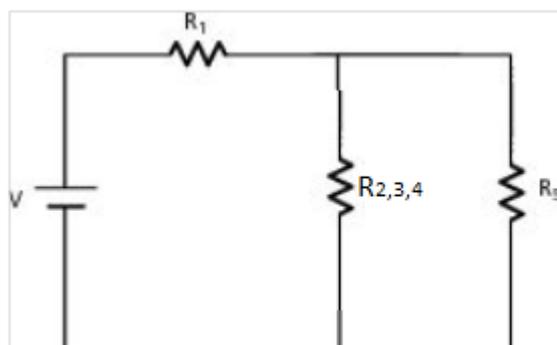
Le resistenze R_3 e R_4 sono in parallelo, per cui si ottiene:

$$R_{3,4} = \frac{6\Omega \cdot 3\Omega}{6\Omega + 3\Omega} = 2\Omega$$



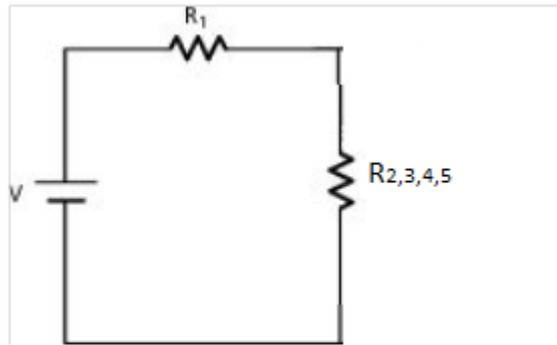
La resistenza R_2 è in serie con $R_{3,4}$:

$$R_{2,3,4} = 1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$$



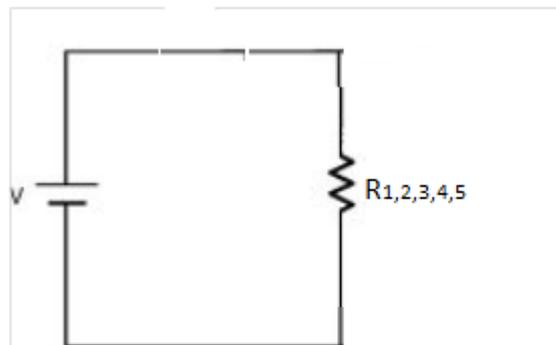
La resistenza $R_{2,3,4}$ e la resistenza R_5 sono in parallelo:

$$R_{2,3,4,5} = \frac{3\Omega \cdot 3\Omega}{3\Omega + 3\Omega} = 1,5\Omega$$



Infine $R_{2,3,4,5}$ è in serie con R_1 :

$$R_{1,2,3,4,5} = 1,5\Omega + 1,5\Omega = 3\Omega$$



Ora è possibile, utilizzando la prima legge di Ohm, ricavare l'intensità della corrente erogata dalla pila:

$$i = \frac{V}{R_{1,2,3,4,5}} = \frac{4,5 V}{3 \Omega} = 1,5 A$$

Questa corrente attraversa anche R_1 , dato che è in serie con la pila, possiamo quindi determinare subito la d.d.p. ai capi di R_1 :

$$\Delta V_1 = R_1 i = 1,5 \Omega \cdot 1,5 A = 2,25 V$$

Ora eseguiamo i passaggi per pervenire alla d.d.p. ai capi di R_3 . Possiamo ricavare, sempre con la prima legge di Ohm, la d.d.p. ai capi di $R_{2,3,4,5}$, osservando che essa è in serie con R_1 e quindi sarà anch'essa attraversata dalla corrente di 1,5 A:

$$\Delta V_{2,3,4,5} = R_{2,3,4,5} i = 1,5 \Omega \cdot 1,5 A = 2,25 V$$

A questo risultato si poteva pervenire anche considerando che R_1 e $R_{2,3,4,5}$ sono uguali e che, pertanto, la d.d.p. della pila si divide in due parti uguali ai capi delle resistenze.

Ora ricaviamo la corrente che attraversa $R_{2,3,4}$, osservando che, essendo in parallelo con R_5 , la d.d.p. ai suoi capi è sempre $\Delta V_{2,3,4} = \Delta V_5 = \Delta V_{2,3,4,5} = 2,25 V$:

$$i_{2,3,4} = \frac{\Delta V_{2,3,4}}{R_{2,3,4}} = \frac{2,25 V}{3 \Omega} = 0,75 A$$

anche questo risultato poteva essere ottenuto osservando che, essendo $R_{2,3,4}$ e R_5 uguali, la corrente di 1,5 A si divide in due parti uguali.

Questa corrente attraversa sia R_2 che $R_{3,4}$, dato che sono in serie:

$$i_{3,4} = i_2 = i_{2,3,4} = 0,75 \text{ A}$$

pertanto possiamo ricavare la d.d.p. ai capi di $R_{3,4}$, che sarà uguale a quella ai capi di R_3 e R_4 , dato che sono in parallelo:

$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = \Delta V_{3,4} = R_{3,4} \cdot i_{3,4} = 2 \Omega \cdot 0,75 \text{ A} = 1,5 \text{ V}$$

Per ciò che riguarda l'energia dissipata per effetto Joule, ricordiamo che essa può essere ottenuta mediante una delle tre seguenti formule:

$$E = i \cdot \Delta V \cdot \Delta t \quad \text{oppure} \quad E = R \cdot i^2 \cdot \Delta t \quad \text{oppure} \quad E = \frac{\Delta V^2}{R} \cdot \Delta t$$

Nel nostro caso, in modo da sfruttare i risultati precedenti, conviene sfruttare l'ultima delle tre formule:

$$E_1 = \frac{\Delta V_1^2}{R_1} \cdot \Delta t = \frac{2,25^2 \text{ V}^2}{1,5 \Omega} \cdot 2 \text{ s} = 3,375 \text{ W} \cdot 2 \text{ s} = 6,75 \text{ J}$$

$$E_3 = \frac{\Delta V_3^2}{R_3} \cdot \Delta t = \frac{1,5^2 \text{ V}^2}{6 \Omega} \cdot 2 \text{ s} = 0,375 \text{ W} \cdot 2 \text{ s} = 0,75 \text{ J}$$

Nello svolgimento dei calcoli non si è effettuato alcun arrotondamento, in considerazione del fatto che la maggior parte dei dati sono forniti con una sola cifra significativa, per cui le regole sull'arrotondamento avrebbero costretto a scrivere tutti i risultati con una sola cifra significativa, invalidando così tutto il procedimento seguito.