QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione y=f(x) sapendo che la retta y=-2x+5 è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che f'(x)=-2x^2+6.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$
dove R e r sono i raggi e h l'altezza.
3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?
4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?
$$y" + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$
$$y' + x \cdot y" = 1$$
$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$
$$x^2 \cdot y" + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$
5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazioni x+y-z=0.
6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di f.
7. Detta A(n) l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \longrightarrow \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti i tre vertici del triangolo?
9. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0,2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto in cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici A(1,0), B(4,0), C(4,2) e D(1,2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

SVOLGIMENTO

1. Integrando si ottiene: $f(x)=\int(-2x^2+6)dx=-\frac{2}{3}x^3+6x+C$;

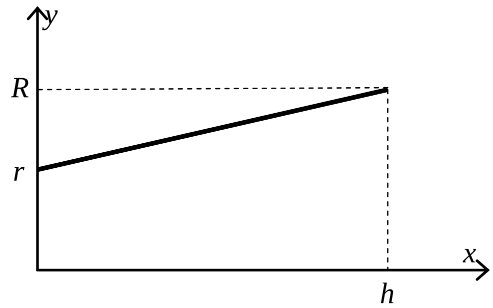
la condizione di tangenza con la retta data impone che sia: $f'(x)=m$ in un punto del II quadrante, da cui: $-2x^2+6=-2 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=-2$ (la soluzione positiva è da scartare);

il punto di ascissa -2 sulla retta ha ordinata: $y=-2(-2)+5=9$; il punto $(-2,9)$ appartiene alla curva $y=f(x)$ se: $9=-\frac{2}{3}(-8)+6(-2)+C$, da cui: $C=\frac{47}{3}$.

La funzione richiesta pertanto è: $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+6x+\frac{47}{3}$.

---

2. Consideriamo il tronco come il solido generato dalla rotazione del trapezio delimitato dal segmento e dall'asse x in figura intorno all'asse x.



La retta passante per i punti $(0,r)$ ed (h,R) ha equazione:

$y=\frac{R-r}{h}x+r$; il volume si calcola con:

$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2dx$, che con la sostituzione: $z=\frac{R-r}{h}x+r \;\Rightarrow\; dz=\frac{R-r}{h}dx$

diventa: $V=\pi\frac{h}{R-r}\int_r^R z^2dz=\frac{\pi}{3}\frac{h}{R-r}(R^3-r^3)=\frac{\pi}{3}\frac{h}{R-r}(R-r)(R^2+Rr+r^2)$, da cui l'asserto.

---

3. Variabile aleatoria a distribuzione binomiale $p_{n,k}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, con: $p=\frac{1}{2}$, $q=1-p=\frac{1}{2}$, $n=6$.

L'evento: "si ottiene testa al più due volte" corrisponde (indicando con k il numero di volte che esce Testa) alla probabilità:

$$P[k=0\vee k=1\vee k=2]=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^6}(1+6+15)=\frac{11}{32}.$$

La seconda probabilità richiesta è:

$$P[k\ge 2]=1-P[0\le k<2]=1-(p_{6,0}+p_{6,1})=1-\frac{1}{2^6}\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}\right]=1-\frac{7}{2^6}=\frac{57}{64}.$$

---

4. Derivando si ottiene: $y'(x)=\frac{d}{dx}(x^{-1}\ln x)=-x^{-2}\ln x+x^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, che permette subito di scartare, verificando tramite sostituzione nell'equazione, la terza ipotesi. Derivando ulteriormente otteniamo:

$$y''(x)=\frac{d}{dx}[x^{-2}(1-\ln x)]=-2x^{-3}(1-\ln x)+x^{-2}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2\ln x-3}{x^3};$$

sostituendo si verifica che soltanto nella quarta proposta si ottiene un'identità:

$$x^2\frac{2\ln x-3}{x^3}+x\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{\ln x}{x} \quad\rightarrow\quad \frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}=\frac{\ln x}{x}\text{, c.v.d.}$$

---

5. L'equazione: $x+y-z=0$ corrisponde a porre uguale a zero il prodotto scalare tra il vettore $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ ed il vettore $\vec{\mathbf{v}}=(1,1,-1)$; il piano in oggetto passa per l'origine ed è quindi ortogonale a $\vec{\mathbf{v}}$; la retta richiesta è l'insieme dei punti $Q=(x,y,z)$ tali che: $\overrightarrow{OQ}=t\,\vec{\mathbf{v}} \quad \forall t\in\Re$,

che equivale al sistema: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$.

---

6. La funzione è un polinomio di secondo grado; il suo termine in x^2 ha evidentemente coefficiente positivo ($a=5$), quindi il grafico corrispondente è quello di una parabola a concavità verso l'alto.

Si verifica facilmente (operando la sostituzione: $\begin{cases} x\rightarrow 6-x \\ y\rightarrow y \end{cases}$) che l'equazione $y=f(x)$ è invariante per simmetria rispetto alla retta $x=3$, che pertanto rappresenta l'asse di simmetria della parabola, ove quindi si trova il vertice che è il punto di minimo richiesto, ed è: $f(3)=10$.

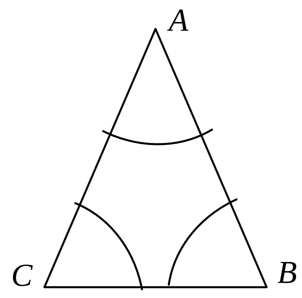
---

7. Il poligono è l'unione di n triangoli isosceli di lato obliquo r ed angolo al vertice $\frac{2\pi}{n}$. L'area di ciascuno di questi vale: $\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$; l'intero poligono ha area: $\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Il limite: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$ con la sostituzione: $x=\frac{2\pi}{n}$ diventa:

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}r^2\frac{2\pi}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}\pi r^2\frac{\sin x}{x}=\pi r^2$, avendo fatto uso del limite notevole: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

8. I punti distanti più di 2 cm da ciascun vertice si possono evidenziare nel seguente modo: si tracciano le tre circonferenze di raggio 2 cm centrate nei tre vertici A, B, C del triangolo; la regione che si ottiene eliminando dal triangolo i tre settori circolari in esso contenuti è l'insieme dei punti distanti più di 2 cm da ciascun vertice.
La probabilità che un punto scelto nel triangolo cada in questa regione è data dal rapporto dell'area della stessa con l'area del triangolo.
Indicate con α, β e γ le ampiezze dei tre angoli e posto $r = 2\ cm$, la somma dei tre settori circolari vale:



$$S_A + S_B + S_C = \frac{1}{2}\alpha r^2 + \frac{1}{2}\beta r^2 + \frac{1}{2}\gamma r^2 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi\ \ cm^2 .$$

Inoltre è: $\cos\beta = \dfrac{\overline{BC}/2}{\overline{AB}} = \dfrac{5}{12}$, quindi: $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{\sqrt{119}}{12}$, ed il triangolo pertanto ha area: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin\beta = \dfrac{5}{4}\sqrt{119}\ \ cm^2$.

La probabilità richiesta vale: $p = \dfrac{S_{ABC} - (S_A + S_B + S_C)}{S_{ABC}} \approx 0.539$.

9. Le ipotesi del teorema di Lagrange richiedono continuità in $[0,2]$ e derivabilità in $]0,2[$.

Per la continuità dev'essere: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} x^3 = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - kx + k) = 1$, da cui: $1 = 1 - k + k = 1$, il che è vero per $\forall k \in \Re$.

Per la derivabilità: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x - k) \Rightarrow 3 = 2 - k$ da cui: $k = -1$.

Pertanto è: $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$.

L'ascissa x_0 prevista dal teorema è quella per cui: $f'(x_0) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0}$, dove: $\dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = \dfrac{5}{2}$.

Prendendo la derivata del primo tratto di funzione, si ottiene: $3x^2 = \dfrac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ di cui è accettabile soltanto la soluzione $x_0 = +\sqrt{\dfrac{5}{6}}$; operando in modo analogo sul secondo tratto, si trova: $2x + 1 = \dfrac{5}{2} \rightarrow x = \dfrac{3}{4}$, non accettabile in quanto non compresa nell'intervallo $]1,2]$.

10. L'area del rettangolo vale 6; di questo, la parte compresa tra la curva assegnata e l'asse delle ascisse ha area data da:

$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$; la rimanente parte di rettangolo ha dunque area: $6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$ ed il rapporto richiesto vale pertanto $\frac{7}{2}$.