Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico e Scientifico opzione scienze applicate
Tema di matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i muniti di conversazione effettuati in un mese, con f(x) la spesa totale nel mese e con g(x) il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni f(x) e g(x) e rappresentale graficamente; verifica che la funzione g(x) non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:
$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$
Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione x=6; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni f(x) e g(x), riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione g(x) e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

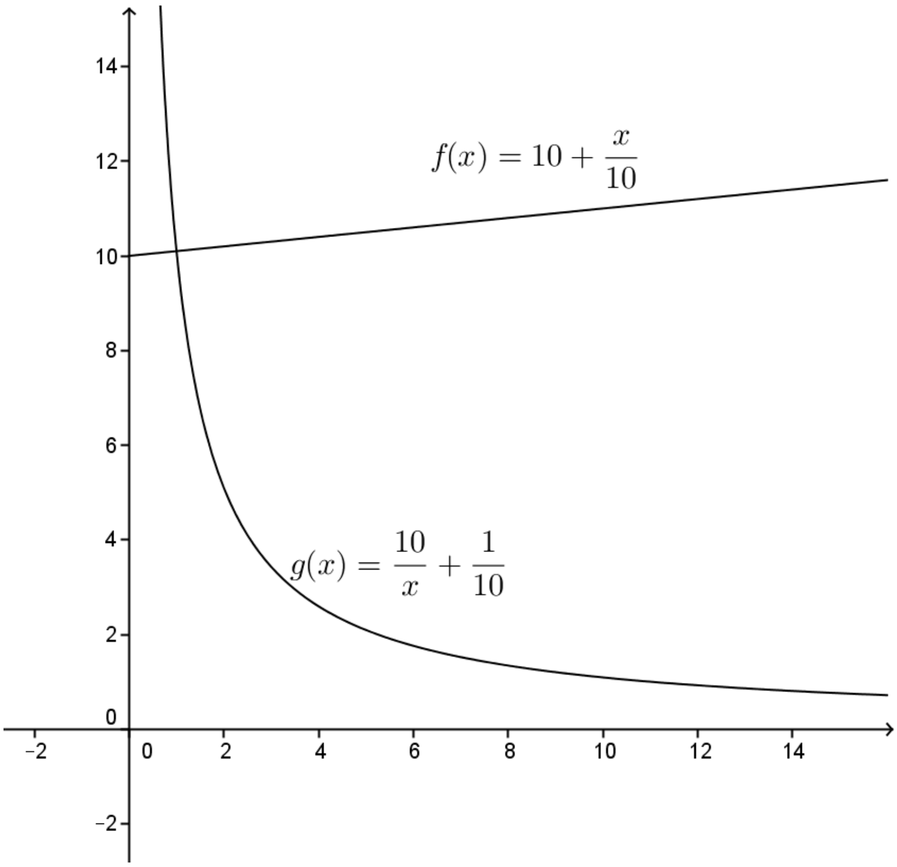
SVOLGIMENTO

Punto 1

La spesa totale in un mese è $f(x)=10+\frac{x}{10}$ (€) con $x \ge 0$ mentre il costo medio al minuto è $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{10}{x}+\frac{1}{10}$ con $x>0$.

La funzione $g(x)=\frac{10}{x}+\frac{1}{10}$ è una funzione omografica (iperbole) con asintoto verticale $x=0$ ed asintoto orizzontale $y=\frac{1}{10}$. Non ha massimi e minimi in quanto una funzione omografica non ha estremanti relativi, o alternativamente notando che la derivata prima è $g'(x)=-\frac{10}{x^2}$ si deduce che $g(x)$ è strettamente decrescente in tutto il suo dominio $x>0$.

Di seguito il grafico



La funzione $f(x)=10+\frac{x}{10}$ rappresenta il costo in minuti dato da un costo fisso più un costo variabile in base ai minuti stessi, quindi è una funzione lineare con i minuti di conversazione e cresce al crescere dei minuti trascorsi a telefono.

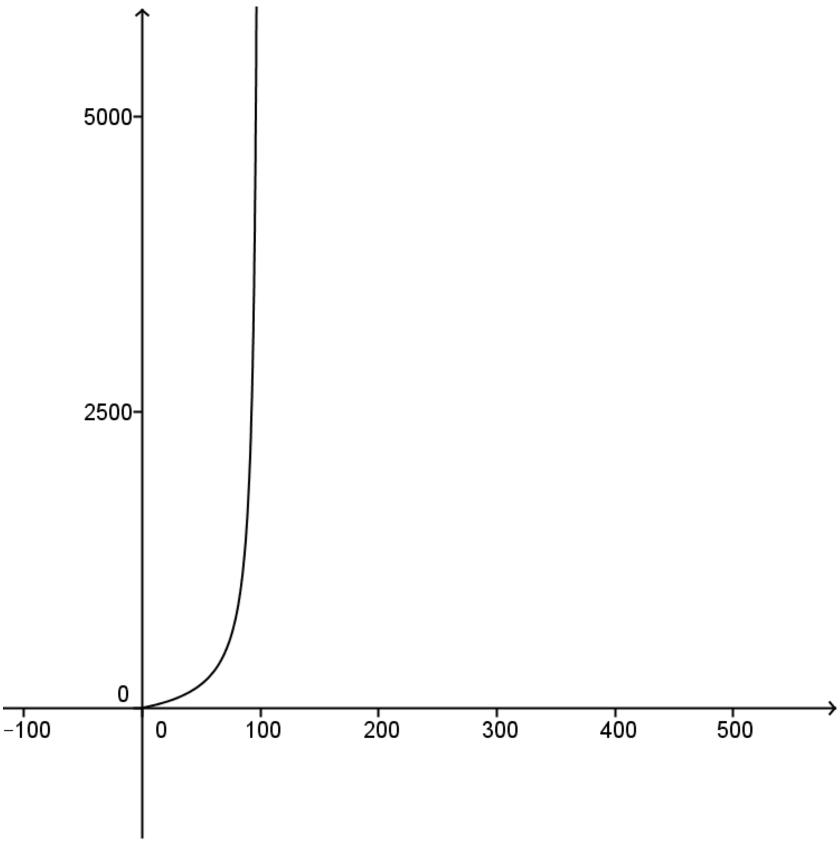
La funzione $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{10}{x}+\frac{1}{10}$ rappresenta il costo medio per minuto che decresce con l'aumentare dei minuti passati a telefono, al limite per x tendente all'infinito il coso medio si riduce al costo di un minuto in quanto il costo fisso sarà trascurabilissimo (nullo o comunque quasi nullo).

Punto 2

$$g(x_1)=\frac{g(x_0)}{2}\Rightarrow\frac{10}{x_1}+\frac{1}{10}=\frac{5}{x_0}+\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{10}{x_1}=\frac{5}{x_0}-\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{10}{x_1}=\frac{100-x_0}{20x_0}\Rightarrow x_1=\frac{200x_0}{100-x_0}$$

La funzione $x_1=\frac{200x_0}{100-x_0}$ ha senso per $0\le x_0<100$ in quanto x_1 è una quantità intrinsecamente non negativa, ed inoltre è una iperbole con asintoto verticale in $x_0=100$.

Di seguito il grafico



La funzione $x_1=\frac{200x_0}{100-x_0}$ rappresenta il numero di minuti che un utente dovrebbe stare a telefono per pagare un costo medio pari alla metà di quello calcolato sui minuti effettivi x_0.

Per $x_0=100$, il costo medio sarebbe $g(100)=0{,}2$ euro/minuto ovvero 20 centesimi a minuto, mentre la metà del costo medio sarebbe $\frac{g(100)}{2}=0{,}1$ euro/minuto ovvero 10 centesimi a minuto;

pertanto in corrispondenza di $x_0 = 100$, la metà del costo medio $\frac{g(x_0)}{2}$ verrebbe a coincidere con il costo per minuto.

Punto 3

La parabola ha equazione $y = ax^2 + bx + c$ e deve passare per A(0,2), B(2, 7/2) e C(4,4).

Poiché C(4,4) è il punto di massimo ed il vertice della parabola si deduce subito che $-\frac{b}{2a} = 4 \Rightarrow b = -8a$ quindi l'equazione diventa $y = ax^2 - 8ax + c$. Imponendo il passaggio per A si ottiene $c = 2$ mentre imponendo il passaggio per C si ottiene $4 = -16a + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$, per cui l'equazione diventa $y = -\frac{x^2}{8} + x + 2$. Per ispezione si trova subito che la parabola passa anche per B.

Il territorio Z è un triangolo rettangolo isoscele di area 1/2, mentre l'area sottesa dalla parabola in [0,6] è $S = \int_0^6 \left(-\frac{x^2}{8} + x + 2 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^6 = -\frac{216}{24} + 18 + 12 = -9 + 30 = 21$.

Pertanto l'area coperta dal segnale è pari in percentuale a $\frac{21 - \frac{1}{2}}{21} \cong 97{,}6\%$, coerente con quanto riportato sul sito web.

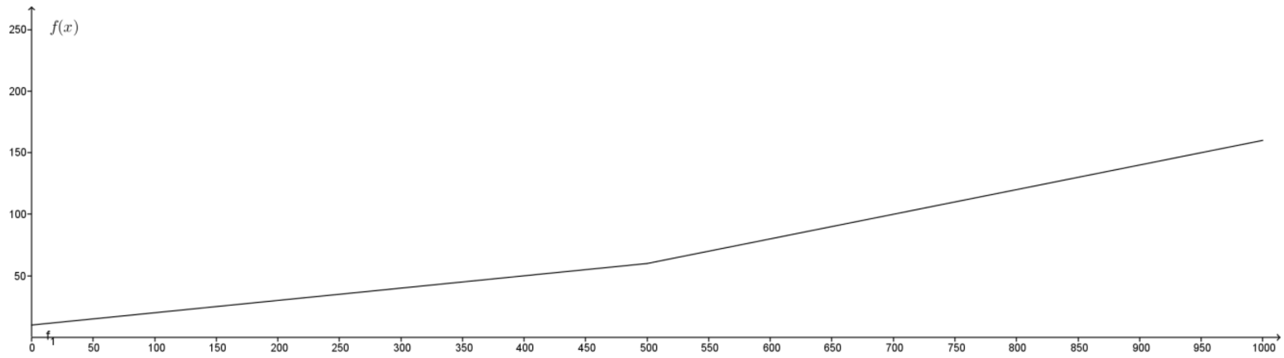
Punto 4

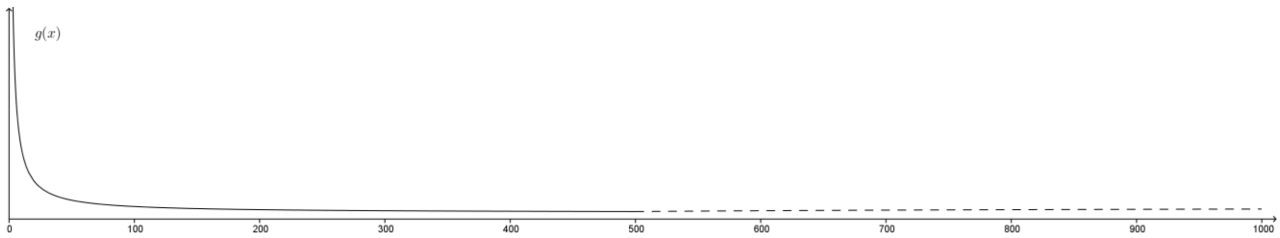
Di seguito le espressioni analitiche delle nuove funzioni di spesa e costo medio a seguito dell'introduzione del costo aggiuntivo dopo i 500 minuti:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & 0 \le x \le 500 \\ 10 + \frac{x}{10} + \left(\frac{x - 500}{10} \right) & x > 500 \end{cases} = f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & 0 \le x \le 500 \\ -40 + \frac{x}{5} & x > 500 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & 0 < x \le 500 \\ -\frac{40}{x} + \frac{1}{5} & x > 500 \end{cases}$$

Di seguito i grafici delle due funzioni.





La nuova funzione $f(x)$

- è continua in tutto il dominio R
- non è derivabile in $x = 500$ che è ascissa di punto angoloso in corrispondeza del quale il salto è $f'(500^+) - f'(500^-) = \frac{1}{10}$
- non presenta asintoti essendo una composizione di funzioni lineari ed è strettamente crescente nel dominio
- presenta un minimo assoluto per x=0 e vale f(0)=10 ovvero 10 euro

La nuova funzione $g(x)$

- è continua in tutto il dominio R-{0}
- non è derivabile in $x = 500$ che è ascissa di punto angoloso in corrispondeza del quale il salto è $g'(500^+) - g'(500^-) = \frac{50}{500^2} = 2 \cdot 10^{-4}$.
- presenta x=0 come asintoto verticale, $y = \frac{1}{5}$ come asintoto orizzontale
- è strettamente decrescente in (0,500) e strettamente crescente per x>500
- non presenta minimi e massimi relativi
- presenta un minimo assoluto per x=500 e vale g(500)=0,12 ovvero 12 centesimi