Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico e Scientifico opzione scienze applicate
Tema di matematica

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3{,}3]$, il grafico Γ disegnato in figura 2. Γ presenta le tangenti orizzontali per x=-1, x=1, x=2. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia g(x) una primitiva di f(x) tale che g(3)=-5.

Figura 2

1. Nel caso f(x) fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3{,}3]$, per cui g(x) ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali g(x) volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola g(0) e, se esiste, il $\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

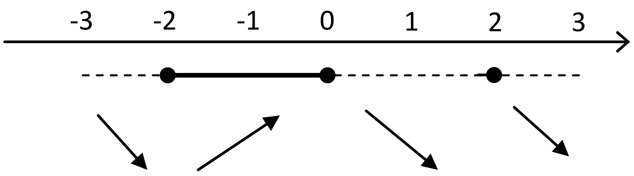
SVOLGIMENTO

1. Il grado di $f(x)$ nell'ipotesi che sia una funzione polinomiale è almeno quarto. Infatti ha tre punti a tangente orizzontale, dunque la sua derivata deve annullarsi in tre punti e quindi è un polinomio di grado non inferiore al terzo. A conferma, una retta opportunamente scelta interseca il grafico della curva Γ in quattro punti.

2. La primitiva $g(x)$ ha monotonia stabilita dal segno di $f(x)$ secondo il seguente schema:

segno di $f(x)$

monotonia di $g(x)$



quindi $g(x)$ ha un massimo relativo in $x = 0$ (gli altri due zeri di corrispondono ad un minimo in $x = -2$ ed un flesso a tangente orizzontale in $x = 2$).

Il verso della concavità di $g(x)$ è fissato dal segno di $g''(x) = f'(x)$; in particolare, la concavità è verso l'alto dove $f'(x)$ è positiva, quindi dove $f(x)$ è crescente. Dal grafico si desume che ciò avviene negli intervalli $[-3,-1]$ e $[1,2]$.

3. Detta $g_0(x)$ la primitiva di $f(x)$ che si annulla per $x = -3$, ovvero: $g_0(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt$, la funzione richiesta $g(x)$ è data da: $g(x) = g_0(x) + K$, con K opportuna costante.

Dai dati forniti sulle aree delle regioni e dal segno degli integrali definiti corrispondenti si trova:

$g_0(3) = -2+3-3-1 = -3$, per cui dalla richiesta che sia: $g(3) = -5$ si ottiene:

$-5 = -3+K \Rightarrow K = -2$, quindi è: $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt - 2$.

Di conseguenza: $g(0) = \int_{-3}^{0} f(t)dt = -2+3-2 = -1$;

il limite richiesto si calcola con la regola di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} = 0 ,$$

dove si è sfruttato il fatto che $g'(x) = f(x)$ e che dal grafico di Γ risulta $f(0) = 0$.

4. Si ha: $\int_{-2}^{1} h(x)dx = 3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx$; con la sostituzione: $z = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dz$ si ha:

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{+3} f(z)dz = \frac{3}{2}(-2+3-3-1) = -\frac{9}{2} .$$