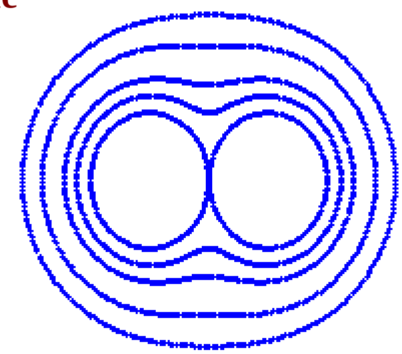
Curve parametriche



Hippopede

Come probabilmente saprete, l'equazione

$$x^2 + y^2 = c^2$$

definisce una circonferenza con centro in (0, 0) e raggio c. La domanda è: come tracciare una circonferenza? Un modo è quello di risolvere l'equazione rispetto ad y.

Scriviamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

che ha soluzioni

$$y = \begin{bmatrix} \sqrt{c^2 - x^2} \\ -\sqrt{c^2 - x^2} \end{bmatrix}$$

Disegnare una Circonferenza

Questa formulazione richiede di tracciare due curve: una per la radice positiva e una per la radice negativa. Questo è però un modo poco elegante di tracciare una circonferenza. Comunque, se si passa alle coordinate polari, l'espressione per la circonferenza diventa molto semplice.

$r = c$ per ogni valore di θ

Possiamo rappresentare l'equazione della curva direttamente usando l'equazione in coordinate polari. Ma è interessante vedere come possiamo rappresentare la nostra circonferenza mediante un diagramma cartesiano x-y. Questo ci porta all'idea di rappresentazione **parametrica** della circonferenza:

$$x = c \cdot \cos(t)$$
$$y = c \cdot \sin(t)$$

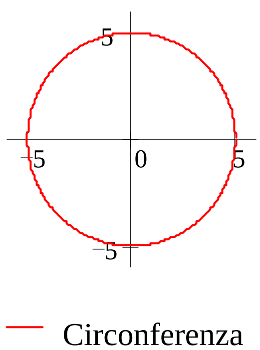
Queste due equazioni ci danno le coordinate x e y dei punti della circonferenza in funzione del parametro t, che varia da 0 a 360 gradi. Ecco come tracciamo la figura:

$c := 5$

$t := 1 .. 360$

$x_t := c \cdot \cos(t \cdot deg)$

$y_t := c \cdot \sin(t \cdot deg)$



L'esempio della circonferenza, per quanto istruttivo, non dà origine a una curva molto interessante. Comunque, curve generate parametricamente possono essere molto più complesse. Ecco alcuni esempi.

Tracciare Curve Complesse

Queste due equazioni parametriche definiscono la **cubica di Tschirnhausen** (sono presenti due parametri, t ed a):

$x(a, t) := 3 \cdot a \cdot (t^2 - 3)$

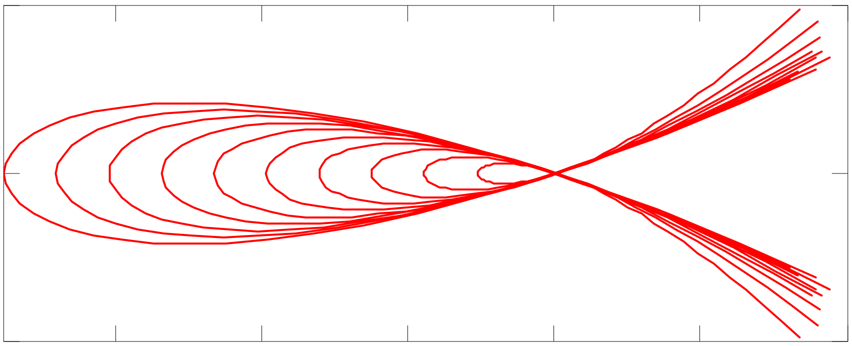
$y(a, t) := a \cdot t \cdot (t^2 - 3)$

dove $t := -4.4, -4.3 .. 4.4$

Se assegniamo ad **a** i valori da .2 a 2.1 otteniamo una famiglia di curve.

$i := 1..10$

$a_i := \frac{2}{10} \cdot i + .1$



Cubica di Tschirnhausen con a variabile da .1 a 2

Un'altra curva interessante è l'**Hippopede**, studiata dal filosofo greco Proclo. Essa è definita dalle equazioni:

$x = 2 \cdot \cos(t) \cdot \sqrt{a \cdot b - b^2 \cdot \sin(t)^2}$

$y = 2 \cdot \sin(t) \cdot \sqrt{a \cdot b - b^2 \cdot \sin(t)^2}$

Questa curva varia tra un aspetto simile a un 8 da una parte e a un bilanciere dall'altra, in dipendenza dai valori di a e b. Il parametro t varia da -180 a 180 gradi. Nell'esempio in basso, a assume 5 valori mentre b è costante uguale a 20. Si ha un insieme di 5 curve che sembrano disegnare la faccia di un gufo.

$b := 20$

$t := -180, -179..180$

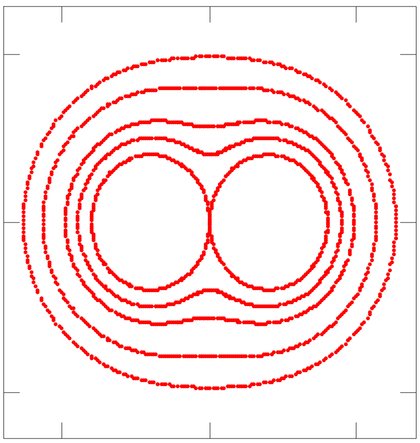
$i := 1..5$

$a_i :=$

20
25
30
40
50

$$x(a,b,t) := 2\cdot\cos(t)\cdot\sqrt{a\cdot b - b^2\cdot\sin(t)^2}$$

$$y(a,b,t) := 2\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{a\cdot b - b^2\cdot\sin(t)^2}$$



Hippopede

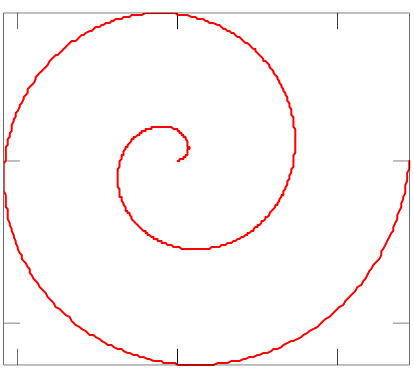
Ora tracciamo una **Spirale di Archimede**. In coordinate polari, la sua equazione è $(r = a\cdot\theta)$

Le equazioni parametriche per una Spirale di Archimede sono:

$t := 0 .. 720$

$x(t) := t\cdot\cos(t\cdot deg)$

$y(t) := t\cdot\sin(t\cdot deg)$



Spirale di Archimede

Ecco ora alcune **Curve Bowditch**, conosciute anche come **figure di Lissajous**. Le costanti a e b definiscono un rettangolo di base a e altezza b in cui sono contenute le curve Bowditch a forma di onda. Le costanti c, d e p determinano la forma della figura di Lissajous. Provate a modificare c e d in differenti piccoli valori interi. Provate a modificare lo spostamento di fase p con valori compresi tra 0 e 180.

$a := 1$

$b := 3$

$t := 0, 1 .. 360$

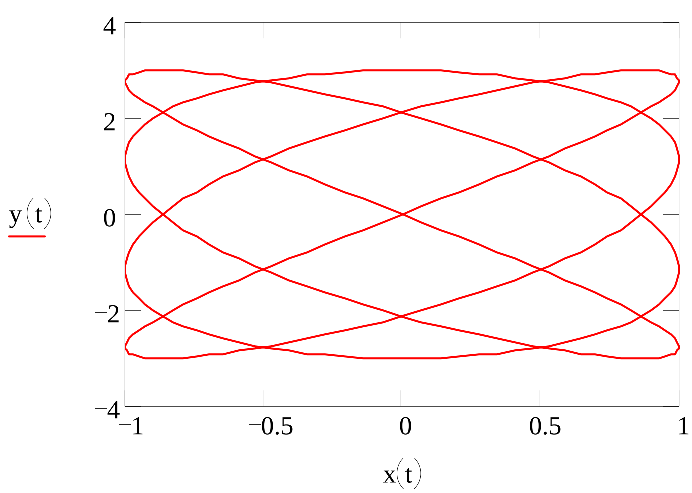
$c := 4$

$d := 3$

$p := 0$

$x(t) := a \cdot \sin[(c \cdot t + p) \cdot deg]$

$y(t) := b \cdot \sin(d \cdot t \cdot deg)$



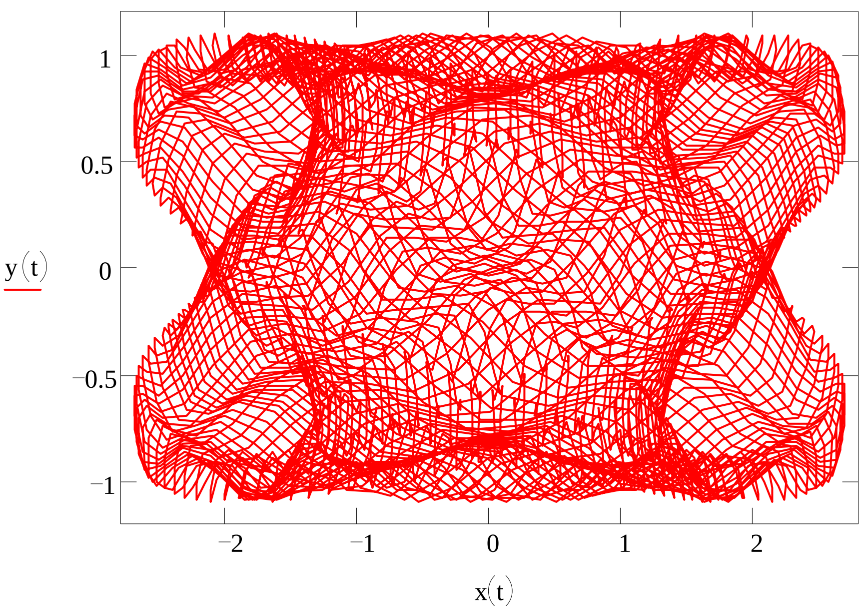
Finalmente, ecco una definizione apparentemente innocua che invece genera una curva molto complessa.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2 \\ .99 \\ -.7 \\ 3.01 \\ 1 \\ 1.01 \\ .1 \\ 15.03 \end{bmatrix}$$

$$x(t) := a \cdot \sin(b \cdot t \cdot deg) + c \cdot \cos(d \cdot t \cdot deg)$$

$$y(t) := e \cdot \cos(f \cdot t \cdot deg) + g \cdot \sin(h \cdot t \cdot deg)$$

$$t := 0, 5 .. 20000$$



Bibliografia

Dewdney, A. K. , "Computer Recreations," *Scientific American*, Maggio, 1988