LA TASSELLATURA DEL PIANO
DI CARLO SINTINI

Questo articolo è stato liberamente tratto, ed illustrato, da un vecchio intervento di Martin Gardner risalente a circa 35 anni fa, sulle pagine di Scientific American.

Viene presa in esame la possibilità di saturare il piano, cioè ricoprirlo senza lasciare spazi vuoti o sovrapposizioni, usando dei poligoni. Ma si badi bene, poligoni tutti dello stesso tipo, altrimenti il problema offre infinite soluzioni, e diviene banale[1].

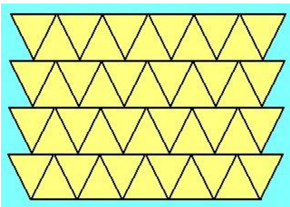
Iniziamo dai poligoni regolari, cioè poligoni convessi e con lati ed angoli interni uguali fra loro. Già nell'antica Grecia si sapeva che solo tre di essi possono ricoprire il piano: il triangolo[2], il quadrato e l'esagono.

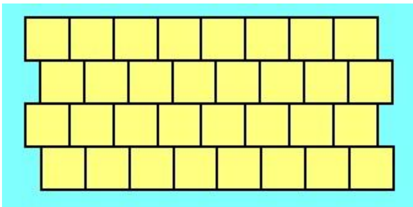
E' impossibile ricoprire il piano usando poligoni regolari con un numero maggiore di lati. Basti pensare che accostando i loro vertici non è possibile ottenere i 360° di un angolo giro. Cominciamo a prendere in considerazione i poligoni regolari.

POLIGONI REGOLARI

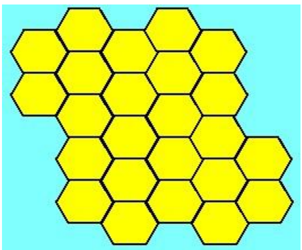
I triangoli equilateri possono essere disposti su file, come in figura, che possono slittare una rispetto all'altra in infiniti modi.

Anche con i quadrati avviene la stessa cosa.





La tassellatura con gli esagoni regolari, così familiare alle api, può invece essere realizzata in un solo modo.



Se eliminiamo la restrizione che la tassellatura debba essere ottenuta con un poligono regolare il problema diventa più interessante.

[1] Basti pensare alla grande varietà di pavimentazioni che capita spesso di osservare dappertutto.

[2] Ovviamente il triangolo equilatero, perché è l'unico ad essere regolare.

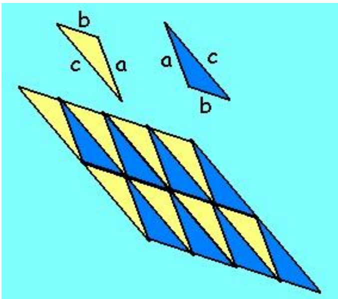
I POLIGONI GENERICI

Si può dimostrare, usando la famosa formula di Eulero relativa ai poligoni: v - s + f = 1 (dove le lettere indicano rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce) e alcuni concetti elementari di analisi diofantea, che con nessun poligono generico (e quindi anche nessun poligono regolare) convesso avente più di sei lati è possibile saturare il piano.

Possiamo limitare quindi il nostro studio solo ai poligoni con tre, quattro, cinque e sei lati.

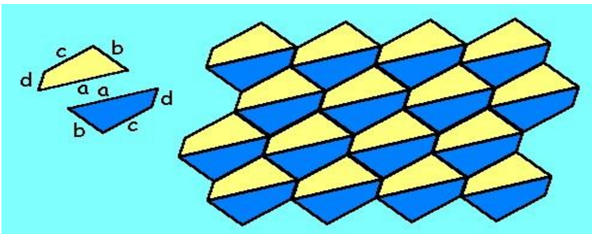
TRIANGOLO GENERICO

Il caso del triangolo generico è facile. Ogni triangolo satura il piano, infatti basta ruotare il triangolo di 180° e congiungere poi il triangolo iniziale e quello ruotato in modo che combacino due lati corrispondenti, per ottenere un parallelogramma. Disponendo i parallelogrammi uno di fianco all'altro si otterrà una striscia infinita coi lati paralleli, e collocando queste strisce una di fianco all'altra si satura il piano. La disposizione non è unica perché in genere si possono formare tre parallelogrammi diversi e le "strisce" possono essere fatte scorrere le une rispetto alle altre.



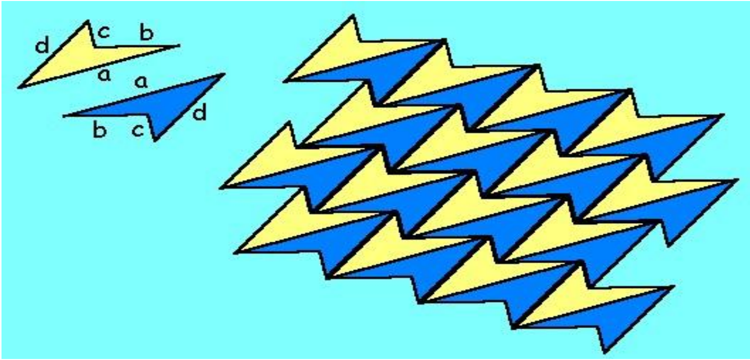
QUADRILATERO CONVESSO

Per quello convesso come prima basta accostare fra loro due quadrilateri identici, uno dei quali sia ruotato di 180° rispetto all'altro, ed accostarli lungo due qualsiasi lati corrispondenti. Il risultato e' un esagono (non regolare ma con i lati opposti sempre uguali e paralleli) che permette la formazione di una striscia sulla quale può essere accostata una seconda striscia, e così via.



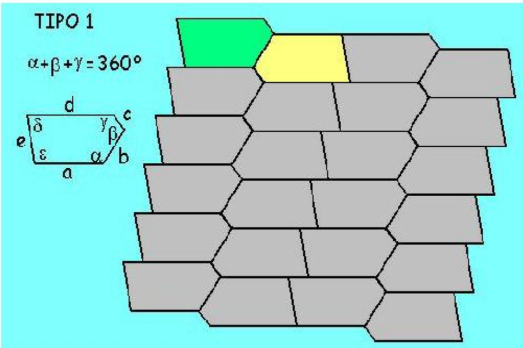
QUADRILATERO CONCAVO

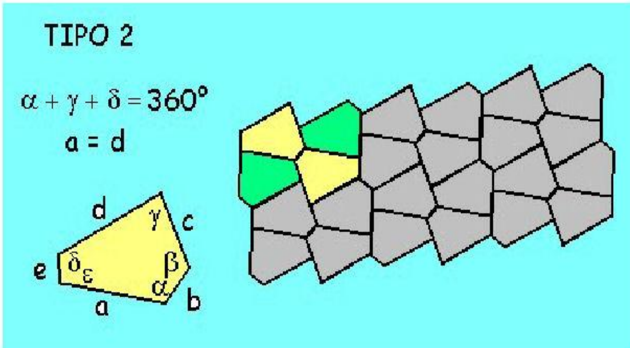
Per il quadrilatero concavo è ancora valido lo stesso procedimento e restano uguali anche le considerazioni finali. Quindi ogni quadrilatero satura il piano, cioè lo può ricoprire perfettamente senza lasciare spazi vuoti e senza sovrapposizioni.

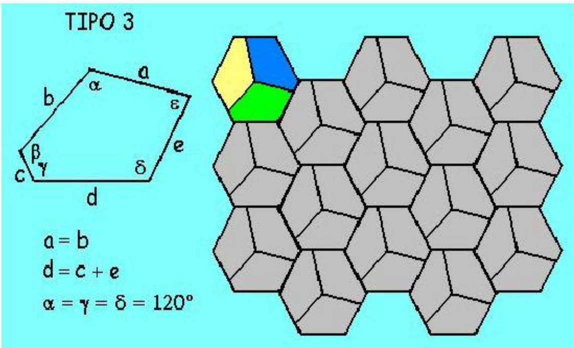


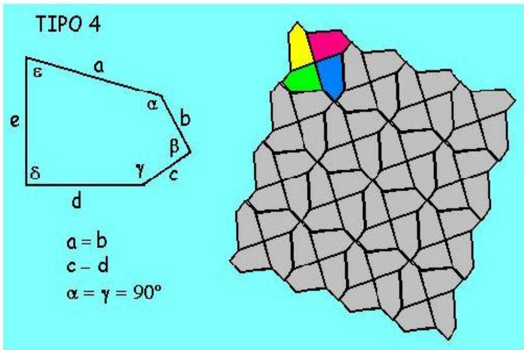
PENTAGONO CONVESSO GENERICO

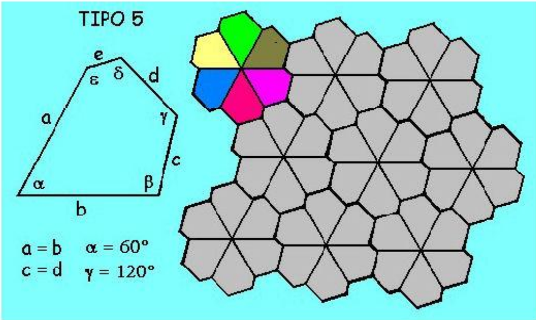
Esistono otto tipi di pentagoni convessi capaci di saturare il piano.
Un pentagono convesso satura il piano se e solo se appartiene a uno o più dei tipi seguenti:

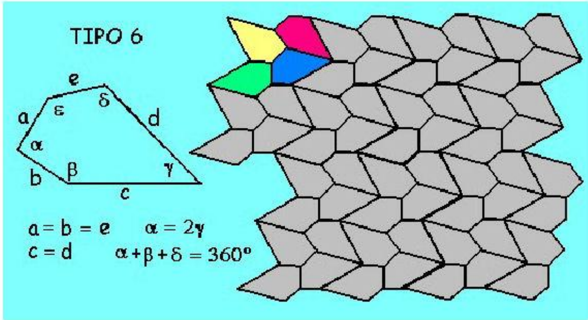


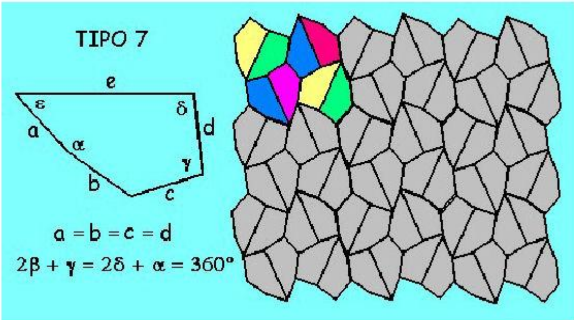


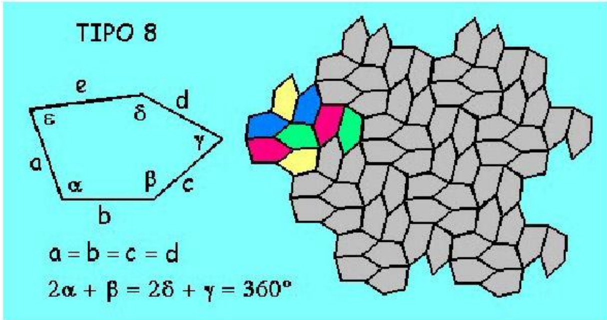










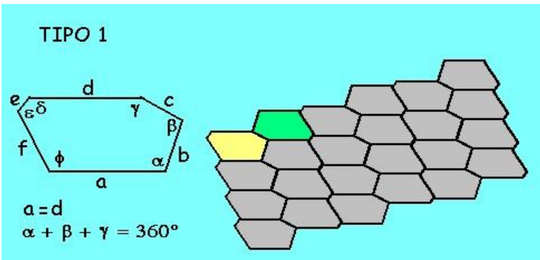


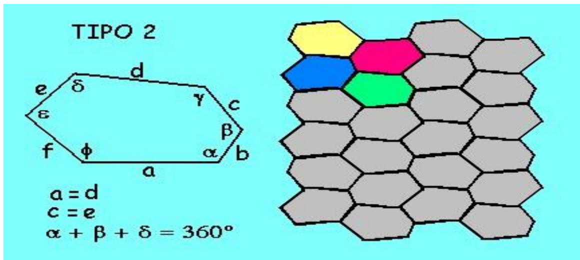
Gli ultimi due tipi richiedono anche una riflessione. Si osservi che gli schemi sono stati disegnati utilizzando poligoni il più possibile irregolari, entro i limiti del tipo rispettivo, per mettere in luce la natura caratteristica della tassellatura.

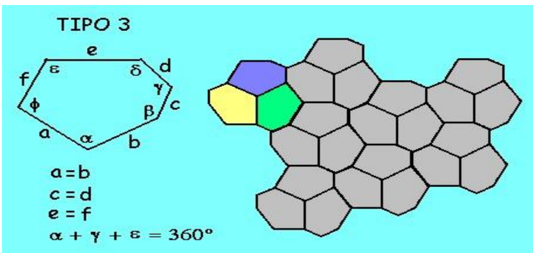
Notiamo che il pentagono equilatero (cioè quello con tutti e cinque i lati uguali, ma non con gli angoli interni uguali! Cioè non un pentagono equilatero !), appartiene sempre al TIPO 1.

ESAGONO CONVESSO GENERICO

Il caso dell'esagono fu risolto nel 1918 da K. Reinhardt nella sua tesi di dottorato presentata all'Università di Francoforte. Egli dimostrò che gli esagoni convessi capaci di saturare il piano si dividono in tre tipi:





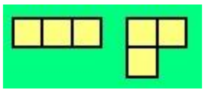


Si osservi che il tipo 2, quando è asimmetrico, richiede anche una riflessione.

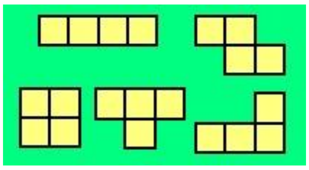
Un esagono convesso saturerà il piano se e solo se appartiene a uno dei tre tipi precedenti.

I POLIMINI

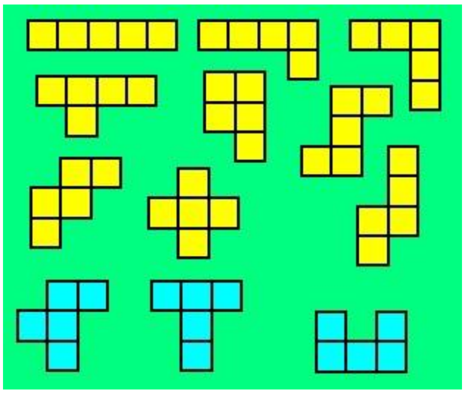
Si ottengono i polimini accostando fra loro dei quadrati in tutti i modi possibili.
Il **monomino** (è un quadrato singolo), il **domino** (due quadrati affiancati), e costituiscono un caso banale perché ricoprono il piano in modo ovvio.
Sono poi due possibili tipi di **tromino** (poligoni formati da tre quadrati affiancati, vedi sotto) ed anch'essi saturano il piano in modo ovvio.



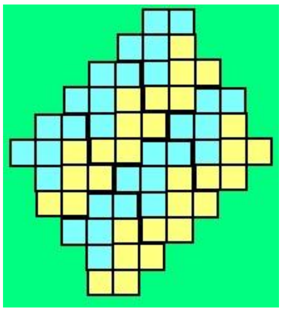
I **tetramini** sono invece cinque

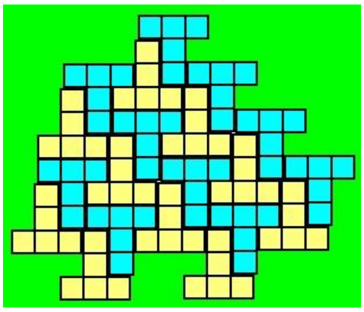


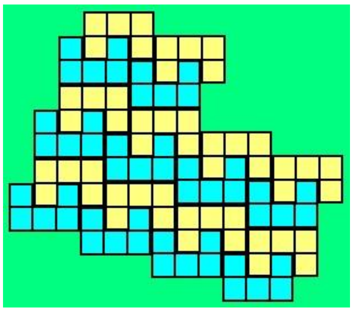
E ciascuno di essi satura il piano senza bisogno di rotazioni o riflessioni.
Diverso è invece il discorso per i **pentamini**: sono dodici e solo alcuni di essi saturano il piano senza riflessioni



I tre colorati in celeste (che data la forma, chiameremo F, T ed U) saturano il piano, ma con alcune condizioni (vedi sotto).
Ciascuno di essi, preso in coppia con uno uguale e capovolto, può formare un polimino di ordine 10, che satura il piano per traslazione.

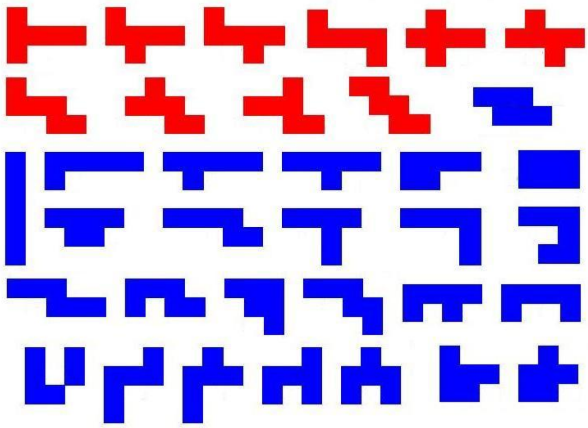






Gli **esamini** invece sono 35 e ognuno satura il piano senza bisogno di riflessione. Alcuni richiedono solo la traslazione, altri vengono riuniti a coppie contrapposte come i pentamini e quindi collegate in modo da formare un polimino di ordine 12 che satura per traslazione.

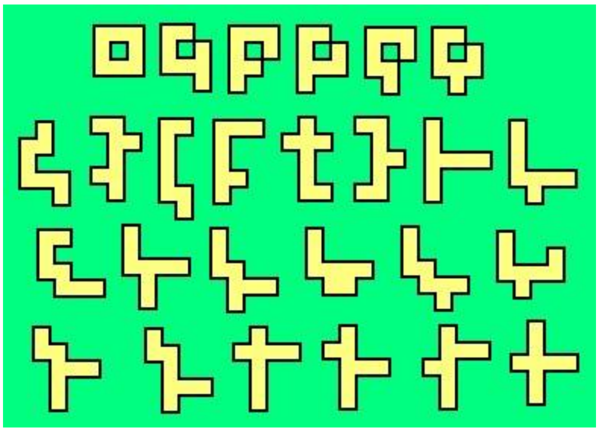
Nella figura seguente sono elencati tutti e 35. Sono segnati in rosso quelli che possono ricoprire un cubo (in altre parole che sono lo sviluppo di un cubo), ed in celeste gli altri.



In realtà anche l'undicesimo potrebbe ricoprire il cubo, ma sarebbe necessario fare un taglio.

Gli **eptamini** possibili sono invece 108. Anche questi non li mostreremo, ma esiste un criterio (detto di Conway), che permette di stabilire se un poligono (di n lati[3]) permette di saturare il piano senza riflessioni. Solo quattro eptamini non permettono la tassellazione.

Gli **ottomini** possibili sono 369. Di essi solo 26 non saturano il piano, e sono elencati qui sotto.



Sei di essi possono essere scartati senza difficoltà perché hanno un buco che è impossibile colmare.

Terminiamo la nostra analisi con gli ottomini perché il numero delle figure possibili aumenta vertiginosamente senza offrire in cambio vantaggi positivi.
Vediamo ora in cosa consiste il criterio di Conway che permette di stabilire se il polimino può saturare il piano (senza riflessioni) o no.

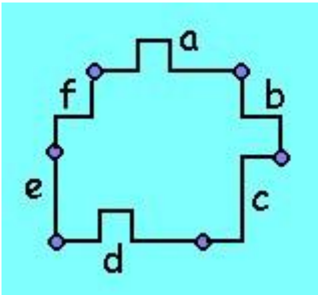
[3] Quindi anche gli eptamini e gli ottomini.

IL CRITERIO DI CONWAY

Dato un poligono arbitrario, ne esaminiamo il perimetro per vedere se sia possibile dividerlo in sei parti, denominate a, b, c, d, e ed f (delimitate dai tondini), in modo che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

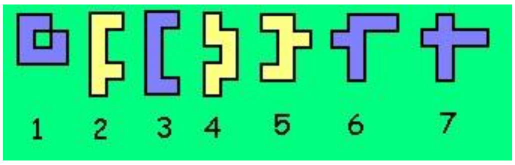
1) Due lati opposti a e d devono essere "paralleli" nel senso che sono congruenti e hanno lo stesso orientamento.
2) Gli altri lati b, c, e ed f devono essere a simmetria centrale nel senso che una rotazione di 180° gradi attorno al loro punto medio li trasforma in se stessi.

Se il poligono soddisfa a queste condizioni saturerà il piano in modo periodico, senza bisogno di riflessioni.



E' una condizione sufficiente ma non necessaria. Cioè se è soddisfatto il criterio di Conway, la saturazione è certamente possibile, mentre può accadere che sia possibile la saturazione anche se il criterio non è soddisfatto.

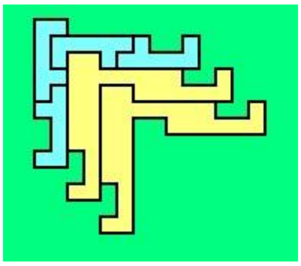
Per esempio con i 108 eptamini possibili si può provare che 101 rispettano il principio di Conway, mentre sette (elencati qui sotto) non lo soddisfano.



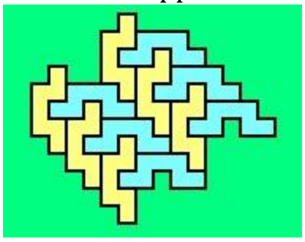
Però il secondo, il quarto e il quinto eptamino permettono la tassellazione del piano malgrado non soddisfino il criterio di Conway. mentre il primo, il terzo, il sesto e il settimo non permettono assolutamente la tassellazione (il primo poi è ovvio che non possa saturare il piano dato che contiene un buco che è impossibile riempire).

Quindi gli eptamini che non saturano sono in totale quattro.

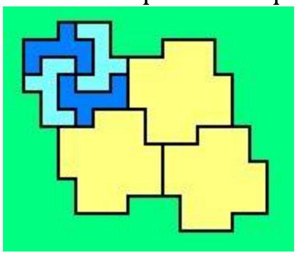
Il secondo eptamino satura applicando una riflessione, ed è l'unico dei 108 a richiedere necessariamente una riflessione.



Il quarto eptamino satura il piano disponendosi a coppie di elementi ruotati di 90 gradi.



Il quinto eptamino, che secondo Conway è il più interessante, satura il piano in due modi: disponendosi a coppie di cui un elemento è riflesso e ruotato di 90 gradi, e disponendosi a quadruple, senza riflessione, dove lo stesso elemento viene disposto nei quattro orientamenti possibili.



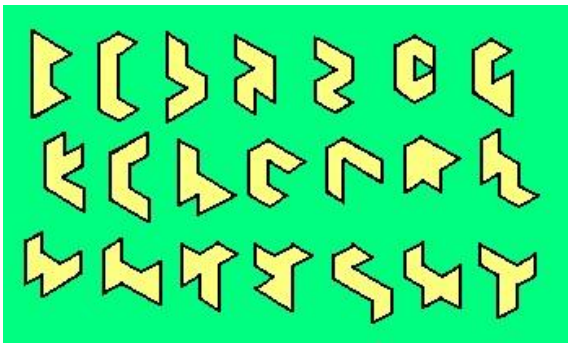
I POLIMONDI

Tra le infinite tassellature del piano che si possono ottenere con poligoni congruenti (cioè sovrapponibili) e non convessi, oltre ai polimini sono interessanti anche quelle ottenibili con i polimondi.
Mentre i polimini si ottengono unendo in tutti i modi possibili dei quadrati, i poliexi unendo fra loro degli esagoni regolari, i polimondi si ottengono combinando dei **triangoli equilateri**. Usando il criterio di Conway non è difficile stabilire che tutti i polimondi fino a quelli formati con sei triangoli equilateri (esamondi), soddisfano il criterio e quindi saturano il piano. Esaminiamo allora i polimondi di ordine superiore al sesto.

Dei 24 eptamondi possibili, solo quello a forma di V non satura.

Tutti gli ottomondi saturano.

Gli ennamondi (enna = 9) sono in tutto 160.



Sono 21 quelli che non saturano (e sono indicati qui sopra).

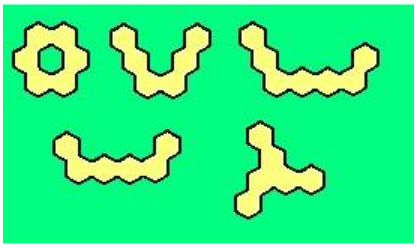
I POLIEXI

Tra le infinite tassellature del piano che si possono ottenere con poligoni congruenti (cioè sovrapponibili) non convessi, oltre ai polimini e ai polimondi sono interessanti anche quelle ottenibili con i poliexi.

Mentre i polimini si ottengono unendo in tutti i modi possibili dei quadrati, i polimondi combinando dei triangoli equilateri, i poliexi si ottengono combinando degli esagoni regolari.

Tutti i poliexi fino all'ordine 5 saturano il piano. Per i poliexi di ordine 6 ?

Degli 83 esaexi possibili, ve ne sono solo 5 che non saturano. E sono quelli indicati qui sotto



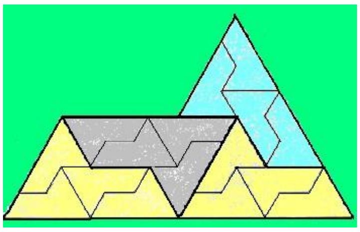
E fermiamoci qui perché il discorso si fa presto troppo complicato.

TASSELLATURE APERIODICHE

Diremo che una tassellatura e' non periodica (o aperiodica) quando e' impossibile combinare un certo numero di poligoni uguali in modo che formino una struttura che poi possa ricoprire il piano accostando fra loro molte di tali strutture.

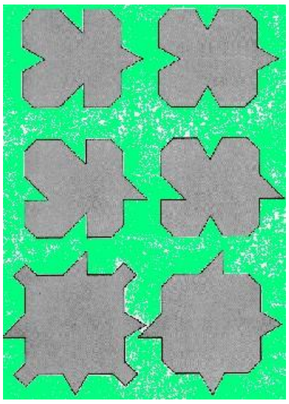
Un primo caso interessante si verifica quando questa struttura ha una forma identica a quella del poligono iniziale.

Un buon esempio di questo tipo di tassellatura e' costituito dalla "sfinge". Quattro poligoni formano una struttura identica al poligono iniziale che si può replicare all'infinito fornendo una sfinge sempre più grande, ed è facile constatare che non esiste alcuna periodicità.

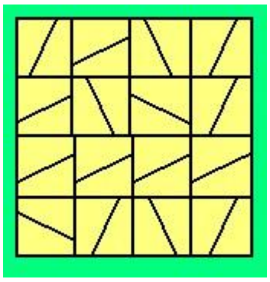


Golomb, un matematico, chiama rep-tile un pezzo (tile in inglese) con questa proprietà di autoreplicazione: cioè un pezzo che ha la possibilità di autoreplicarsi.

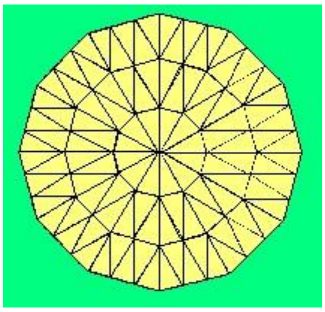
Un altro studioso dell'argomento, R.M. Robinson, ha elaborato sei tessere, ciascuna delle quali permette la realizzazione di una tassellatura non periodica (di tipo diverso dalla precedente, in cui sono ammesse anche la rotazione e la riflessione).



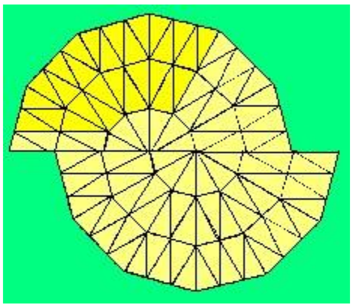
Una scacchiera poi, si può facilmente trasformare in una tassellatura non periodica: basta bisecare ogni casella, e cambiare l'orientamento delle bisezioni per evitare la periodicità.



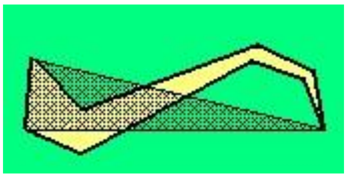
I triangoli isosceli possono dar luogo anche a tassellature non periodiche radiali. Sebbene la tassellatura sia altamente ordinata, è ovviamente non periodica.



Tale tassellatura, si può tagliare a metà e poi si possono spostare di un passo o più i due semipiani in modo da ottenere una forma a spirale di tassellatura non periodica.

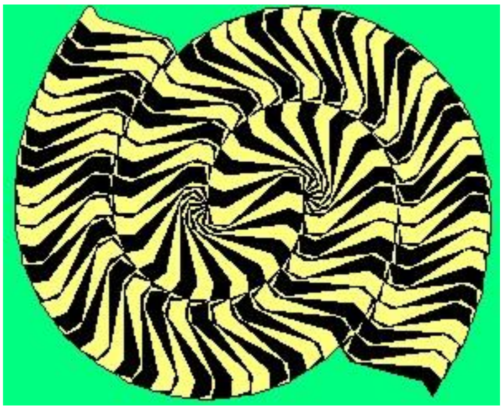


Il triangolo isoscele si può distorcere in infiniti modi, sostituendo i suoi lati uguali con linee congruenti (cioè identiche, sovrapponibili), non necessariamente rettilinee.



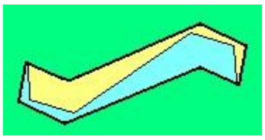
Se i nuovi lati sono rettilinei, il risultato è un poligono di 5, 7, 9, 11 ... lati che dà luogo a una tassellatura a spirale.

Ecco una singolare struttura ottenuta in questo modo dal poligono precedente con nove lati.

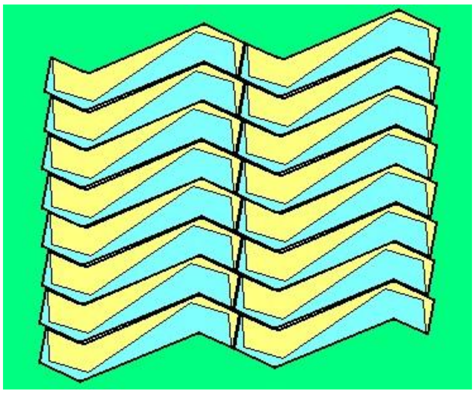


In tutti i casi conosciuti di tassellatura non periodica con figure congruenti, la figura tassella anche periodicamente.

Per esempio due ennagoni come quelli visti sopra possono essere combinati in modo da formare un ottagono.



che permette una tassellatura periodica.



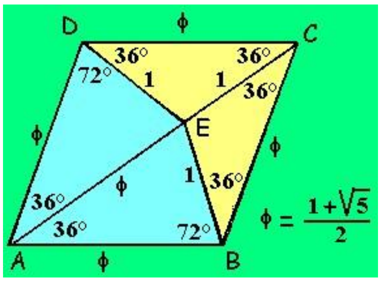
Ma ora poniamoci una domanda diversa: esistono insiemi di tessere di due o più forme differenti che diano luogo solo a tassellature non periodiche ?

La risposta e' affermativa. Penrose, insegnante di matematica all'Istituto di matematica dell'Università di Oxford, è noto tra i fisici per i suoi contributi alla teoria della relatività e alla cosmologia. Insieme a suo padre, lo scomparso L.S. Penrose, fu il primo a scoprire "oggetti impossibili", come la famosa scala di Penrose che Escher usò in modo così brillante nella sua litografia Ascending and Descending.

Egli ideò due interessanti tessere denominate "aquiloni" e "punte" che possono essere derivate da un rombo con angoli di 72 e 108 gradi, e che ora andremo a trattare.

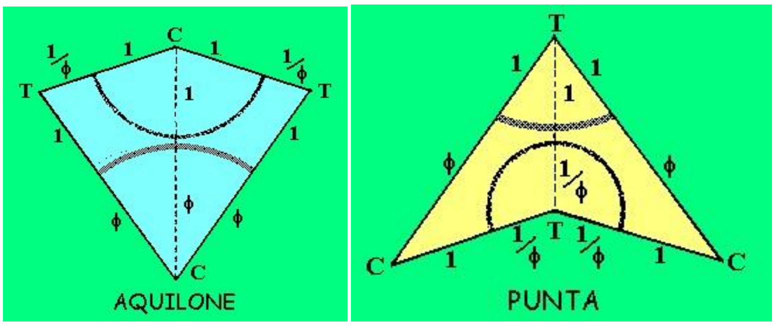
LE TESSERE DI PENROSE

Penrose ideò due interessanti tessere denominate "aquiloni" e "punte" che possono essere derivate da un rombo con angoli di 72 e 108 gradi.



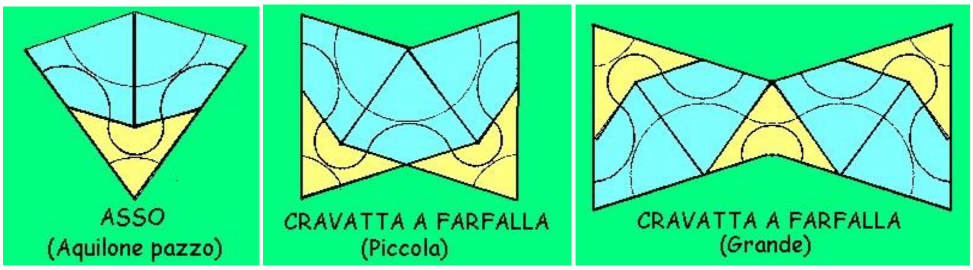
Basta calcolare la sezione aurea AE=ϕ della diagonale maggiore AC. Ogni segmento rettilineo è 1 o ϕ come indicato nella figura.

Il rombo può dar luogo ovviamente a una tassellatura periodica banale, che non ci interessa. Penrose ebbe invece l'interessante idea di suddividere il rombo in due figure che chiamò aquilone e punta.

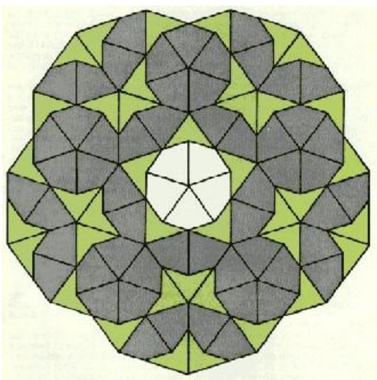


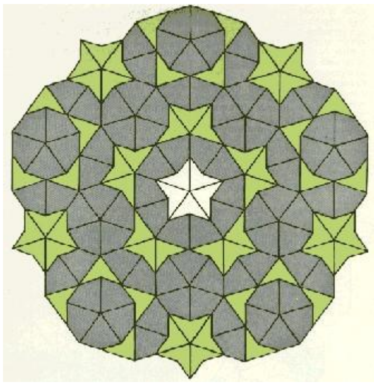
I due angoli li indicheremo con T=72° e C=108° (testa e coda), e poi porre come regola che, nel far combaciare i lati, possono essere adiacenti solo angoli contrassegnati dalla stessa lettera.

Basterà ora connettere le tessere rispettando questa regola. Per costruire tassellature infinite e non periodiche può essere utile tenere presenti tre formazioni elementari denominate asso, farfalla piccola e farfalla grande.

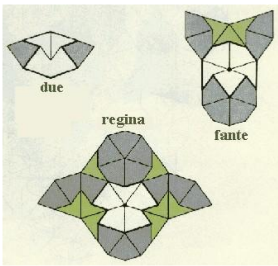


Ecco alcuni eleganti tassellature ottenute componendo le tessere di Penrose, denominate rispettivamente sole bianco e stella bianca.

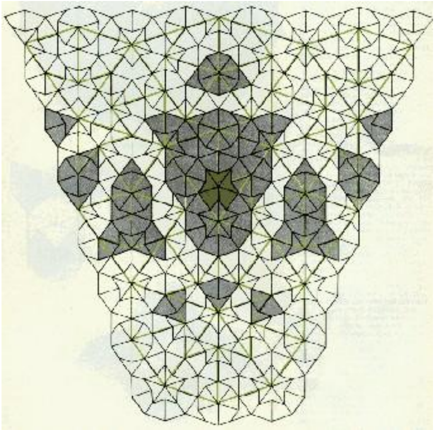




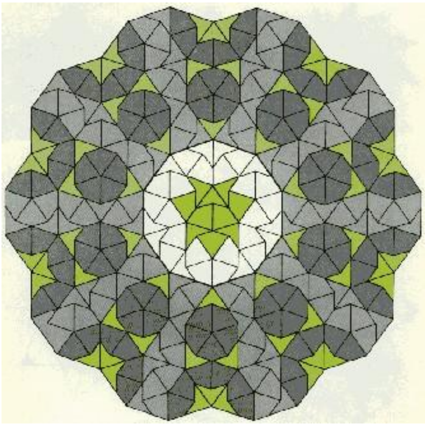
Altre tre formazioni elementari sono il due, il fante e la regina



Con esse si può costruire la tassellatura detta impero del re (dove il re è la parte più scura al centro)

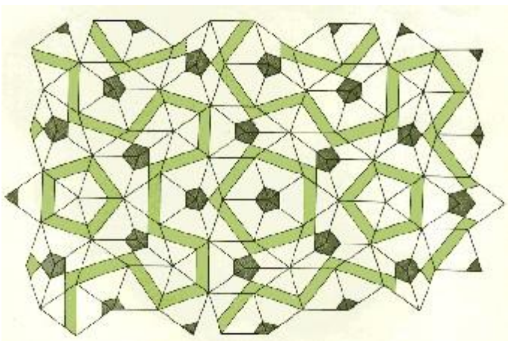


E la struttura della ruota

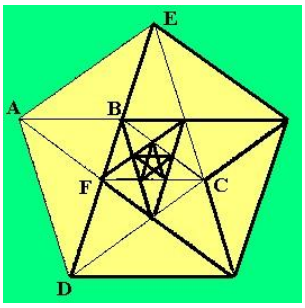


Sezionando punte e aquiloni in pezzi più piccoli e componendo questi ultimi in altri modi, si possono ottenere altre coppie di tessere con proprietà analoghe a quelle delle punte e degli aquiloni.

Penrose trovò anche una coppia straordinariamente semplice di tessere formata da due soli rombi, che permettono una tassellatura non periodica. Tutti i lati hanno la stessa lunghezza. Il pezzo più grande ha angoli di 72 e 108 gradi e quello più piccolo di 36 e 144 gradi. La non periodicità può essere indotta tramite una coloratura come quella suggerita da Penrose e che si vede nella figura.



Esaminiamo ora il "pentagramma dei pitagorici": era il simbolo mistico dell'antica setta pitagorica e il diagramma con cui il Faust di Goethe catturò Mefistofele.



La costruzione si può continuare all'infinito verso l'esterno e verso l'interno e ogni segmento sta in rapporto aureo col successivo minore. Si noti come tutte le quattro tessere di Penrose siano immerse nel diagramma. L'aquilone è ABCD, la punta è AECB. I rombi, sebbene le dimensioni relative non siano conservate, sono AECD e ABCF.

Infine, Penrose elaborò anche un disegno analogo a quelli di Escher, con una struttura non periodica che si può estendere all'infinito.