

Calcolo di una radice cubica

di Marco Giancola

Nel libro *Anche tu matematico* di Roberto Vacca, a pagina 20, viene illustrato un metodo semplice ed efficace per risolvere manualmente le radici quadrate. Tale metodo è basato sulla formula che permette di calcolare il quadrato di un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Per fare un semplice esempio, supponiamo di voler calcolare la radice quadrata di 2 senza l'ausilio di una calcolatrice. Si tratterà ovviamente di un numero compreso tra 1 e 2, infatti $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$. Quindi potremo scrivere:

$$\sqrt{2} = 1 + \varepsilon$$

dove ε è un numero positivo inferiore a 1. Elevando al quadrato entrambi i membri della precedente equazione, abbiamo:

$$2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

ε al quadrato è un numero sufficientemente piccolo da poter essere trascurato senza compromettere troppo l'accuratezza del calcolo, ovvero:

$$2 \cong 1 + 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \cong 1/2$$

$1 + 1/2 = 3/2 = 1,5$, che, elevato al quadrato, mi dà 2,25. Quindi 1,5 è un risultato approssimativo non abbastanza preciso. Per ottenere un risultato più soddisfacente, ripeto il procedimento utilizzando il valore ottenuto 1,5. Ossia scrivo l'equazione:

$$\sqrt{2} = 1,5 - \delta$$

dove δ è un numero positivo inferiore ad ε , che viene sottratto a 1,5 poiché 1,5 è la radice quadrata di 2,25 e pertanto la radice quadrata di 2 è inferiore a 1,5. Dopodiché, come prima, elevo al quadrato i 2 membri, ottenendo:

$$2 = (1,5 - \delta)^2 = 2,25 - 3\delta + \delta^2 \cong 2,25 - 3\delta \Rightarrow \delta \cong (2,25 - 2)/3 = 0,08\bar{3}$$

Sottraendo a 1,5 il valore approssimativo di δ così ottenuto, ricaviamo $1,41\bar{6}$ che, elevato al quadrato, mi dà $2,0069\bar{4}$. Quindi 1,41666 è quasi esattamente la radice quadrata di 2. Volendo, si potrebbe iterare nuovamente il procedimento illustrato per ottenere risultati sempre più precisi.

Dovremmo aver imparato tutti a calcolare le radici quadrate, usando solo carta e penna, già alle scuole medie. Tuttavia, quasi nessuno le sa fare, poiché il procedimento che viene insegnato per calcolarle è piuttosto macchinoso e difficile da ricordare. Mentre il metodo contenuto nel libro di Vacca richiede solamente la conoscenza della formula del quadrato di un binomio, che è molto più facile da ricordare e che comunque si può ricostruire facilmente calcolando il prodotto $(a + b)(a + b)$.

Se sono in pochi a saper calcolare una radice quadrata senza calcolatrice, sono ancora di meno quelli in grado di risolvere una radice cubica senza l'ausilio di una calcolatrice scientifica o di un pc. Esistono dei metodi per poterlo fare, la maggior parte dei quali sono tuttavia abbastanza ostici.

Non è difficile rendersi conto che la procedura illustrata sopra per il calcolo delle radici quadrate si può estendere anche al calcolo delle radici cubiche. L'unica sostanziale differenza è che, invece della formula del quadrato di un binomio, ci si deve avvalere della formula del cubo di un binomio:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Analogamente a quanto è stato fatto prima, consideriamo la radice cubica di 2, che sarà uguale a $1 + \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < 1$, infatti $1^3 = 1$ e $2^3 = 8$. Si avrà quindi:

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \varepsilon \Rightarrow 2 = (1 + \varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

Trascurando il termine ε al cubo, si otterrà l'equazione algebrica di 2° grado:

$$3\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 1 = 0$$

le cui radici sono:

$$\varepsilon = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{6}$$

Dal momento che ε deve essere positivo, la radice negativa va ignorata. L'altra radice vale all'incirca 0,2637. Sommando tale numero a 1 ed elevando al cubo, otteniamo 2,018 e pertanto abbiamo già trovato un valore (1,2637) abbastanza soddisfacente della radice cubica di 2. Come prima, per ottenere risultati più precisi, ripeto il procedimento partendo dal risultato ottenuto.

Va detto che, siccome tale procedimento coinvolge il calcolo di una radice quadrata, esso risulta (almeno a mio avviso) vantaggioso se si dispone, oltretutto di carta e penna, anche di una calcolatrice normale con cui calcolare rapidamente tale radice. Se poi si dispone di un modello avanzato di calcolatrice che consenta di calcolare anche le radici cubiche, è inutile dire che, in tal caso, l'utilità del metodo esposto svanisce completamente.

Per concludere, osserviamo che abbiamo iniziato la procedura di calcolo delle radici con la ricerca del numero intero più vicino alla radice che volevamo calcolare; in entrambi gli esempi, il procedimento è partito dal valore 1 che, tra gli interi, è il più vicino alla radice, sia quadrata che cubica, di 2. Per arrivare più velocemente al risultato avente la precisione desiderata, converrebbe iniziare individuando un valore che si avvicini il più possibile alla radice che vogliamo calcolare, cercandolo nel più ampio insieme dei numeri razionali. Per esempio, si ha: $1,3^2 = 1,69$, $1,4^2 = 1,96$, $1,5^2 = 2,25$. Quindi 1,4 è un numero che approssima piuttosto bene il valore della radice quadrata di 2 e pertanto conviene calcolare $\sqrt{2}$ utilizzando tale valore o un valore di poco superiore (dato che $1,4^2 = 1,96 < 2$). Per quanto riguarda invece la radice cubica di 2, abbiamo che: $1,2^3 = 1,728$, $1,3^3 = 2,197$, $1,25^3 = 1,953125$. Perciò 1,25 è un buon valore con cui iniziare la procedura di calcolo della radice cubica di 2.