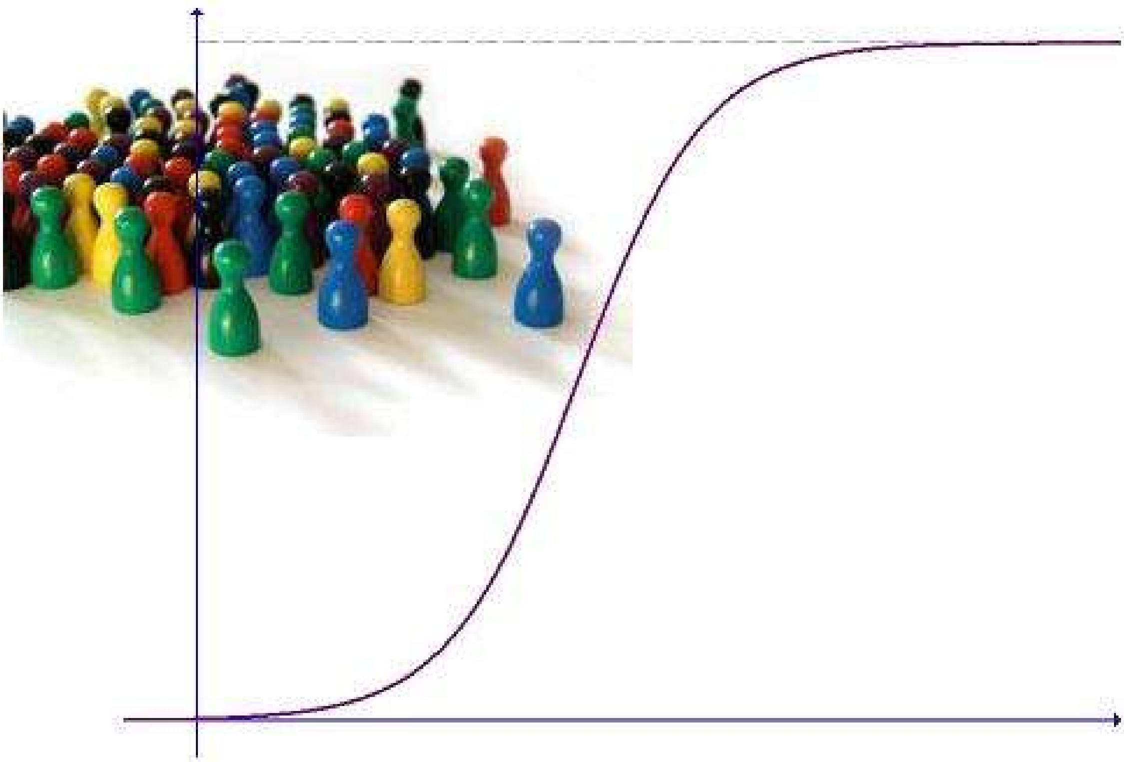
Generalizzazione dell'equazione logistica (UN)

Autore: Antonello Urso - 07/07/07



Pianetagalileo - (ultimo aggiornamento: 23/07/07)

Introduzione:

L'equazione logistica può descrivere lo sviluppo di una popolazione biologica (batteri, animali ecc.) che cresce fino al raggiungimento di un valore costante nel tempo. Tale crescita sarà provocata da una fonte energetica da cui tale popolazione si nutre. E' lecito supporre che sia una singola fonte energetica rinnovabile erogata in modo costante nel tempo in un ambiente privo di materia inquinante verso una popolazione omogenea di una singola specie.

Quindi per esempio in presenza di una fonte energetica rinnovabile (FER) costante e biologicamente assimilabile, una popolazione tenderà a svilupparsi nel tempo con un certo tasso di crescita fino a raggiungere un livello massimo p_M dato dalla seguente equazione differenziale del tipo Bernoulli:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{p_M}\right) \tag{1}$$

La cui soluzione porta alla seguente:

$$p = \frac{p_M}{1 + \exp[-k(t - t_0)]} \tag{2}$$

Come abbiamo detto questo sviluppo dipende dall'energia erogata dalla nostra fonte, cioè fornendo una variazione Q di energia nell'unita di tempo, otterremo il flusso energetico f della nostra FER. Quindi per definizione:

$$dQ(t)/dt = f(t) \tag{3}$$

Stabiliamo adesso per la (2) che la popolazione raggiunga il livello p_M sotto l'effetto fornito di un flusso costante f, e che sia quindi:

$$f = cp_M \tag{4}$$

Dove c è una costante positiva. Avremo quindi secondo la (4) una diretta proporzionalità tra un flusso energetico costante e il numero della popolazione stabilizzata. Questo significa che se per esempio vogliamo raddoppiare la popolazione dovremo raddoppiare anche il flusso energetico perché ogni singolo elemento della popolazione della specie biologica considerata avrà bisogno per vivere di una precisa razione pro-capite di energia c nell'unita di tempo. Il calcolo di questa razione energetica si potrà fare agevolmente una volta raggiunto l'equilibrio tra il numero di nascite e morti usando sempre la (4).

La domanda che ci possiamo porre adesso è se sia possibile una generalizzazione della (1) che descriva la crescita di una popolazione in presenza dell'erogazione di una FER variabile nel tempo, e dell'effetto di un generico ambiente di dimensioni limitate che certamente influisce sullo sviluppo demografico. Per poter trovare una risposta dobbiamo prima chiarire che la dinamica dello sviluppo di una popolazione biologica risentirà non solo delle dimensioni dell'ambiente nel quale si sviluppa, ma anche di una propria "inerzia" che chiameremo: inerzia demografica. Tale inerzia non è altro che la resistenza alla crescita o alla decrescita numerica (descritta dalla funzione di evoluzione demografica $p(t)$ per una popolazione di una singola specie) quando una specie biologica si trova sottoposta ad un flusso energetico, del quale si nutre, variabile nel tempo. Stabiliamo adesso la seguente legge di sviluppo isodinamico:

> *In assenza di fenomeni di inerzia demografica e di limitazioni dello spazio ambientale, la funzione che descrive l'evoluzione numerica di una popolazione nel tempo è uguale, a meno di una costante moltiplicativa, al flusso energetico che permette tale sviluppo.*

Quindi abbiamo:

$$f(t) = cp(t) \tag{5}$$

Con: $c > 0$. Notiamo subito che la (5) è molto più generale della (4) e ci fornirà la chiave per risolvere il nostro problema, dato che dovrà essere una soluzione particolare dell'equazione differenziale che dobbiamo trovare.

La prima idea che ci potrebbe venire in mente per tener in debito conto l'inerzia demografica è di usare la (5) nella (1) in modo da avere:

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)\left(1 - \frac{cp(t)}{f(t)}\right) \qquad ? \tag{6}$$

Così se il flusso energetico è costante allora la (6) mediante la (4) sarà nuovamente uguale alla (1). Sebbene questa sia un ipotesi semplice e suggestiva in realtà non soddisfa la legge di sviluppo isodinamico.

Infatti se supponiamo di avere in un intervallo di tempo $]t_1;t_2[$ un flusso energetico continuo tale che: $df(t)/dt \neq 0$ in tutto l'intervallo considerato, avremo allora che in assenza di inerzia per la (5) dovrà essere: $dp(t)/dt \neq 0$. Applicando però la (5) nella (6) si ottiene: $dp(t)/dt = 0$ in tutto l'intervallo, che è una contraddizione ovvero la (5) non è in generale una soluzione particolare della (6).

Notiamo che la (1) può essere riscritta anche nel seguente modo:

$$\frac{d(1/p)}{dt} + k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_M}\right) = 0 \tag{7}$$

Questo ci potrà aiutare per costruire il nostro modello.

Modello matematico

Stabiliamo adesso per definizione la seguente funzione d'inerzia:

$$u(t) = \frac{1}{p(t)} - \frac{c}{f(t)} - a \tag{8}$$

Dove a è una costante che nel nostro caso è positiva o nulla, e che chiameremo costante ambientale. Allora un buon modello matematico che descriverà la crescita di una popolazione biologica con la (5) come soluzione particolare, che fornisce la (2) nel caso di flusso energetico costante, e che tiene conto dell'inerzia demografica e delle dimensioni finite dell'ambiente può essere descritto dalla seguente equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

$$h_0 u + h_1 u' + h_2 u'' + h_3 u''' + \ldots + h_n u^{(n)} = 0 \tag{9}$$

Le costanti h_i (con $i = 0; 1; 2; 3;...n$) saranno stabilite sperimentalmente in base al problema studiato. Le possibili soluzioni della (9) sono ben note:

$$u(t) = s_1 e^{\lambda_1 t} + s_2 e^{\lambda_2 t} + s_3 e^{\lambda_3 t} + \ldots + s_n e^{\lambda_n t} \tag{10}$$

Se λ_1 è radice multipla di ordine r dell'equazione caratteristica associata alla (9), allora le r funzioni:

$$e^{\lambda_1 t}, x e^{\lambda_1 t}, x^2 e^{\lambda_1 t}, \ldots, x^{r-1} e^{\lambda_1 t} \tag{11}$$

sono integrali dell'equazione (9). Se poi esistono radici complesse dell'equazione caratteristica allora sono possibili soluzioni del tipo:

$$x^m e^{bt} \cos \beta t \, ; x^m e^{bt} \sin \beta t \tag{12}$$

con: $m = 0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; r-1$

La legge di sviluppo isodinamico in questo caso è verificata, infatti: $u(t) = 0$ è una soluzione della (9). Quindi per $a = 0$ mediante la (8) è facile vedere che si ottiene la relazione (5).

Supponendo di avere un flusso energetico costante $f(t) = q$; se prendiamo: $u(t) = s_1 \exp(-kt)$ e $a \geq 0$ otterremo mediante la (8) l'equazione (2). Cioè tale modello è riconducibile alla soluzione dell'equazione logistica classica.

Esempi:

1) Dato un flusso energetico costante $f(t) = c$; se una popolazione ha un inerzia tale che: $u_1(t) = 3\exp(-2t) - \exp(-t)$ ed inoltre $a = 0$, (cioè non ci sono limitazioni dello spazio ambientale alla crescita) avremo allora mediante la (8) la seguente funzione: $p = \dfrac{1}{1 + 3\exp(-2t) - \exp(-t)}$. Vedi nella figura 1 la funzione in verde.

2) Se una popolazione è sottoposta ad un flusso energetico costante $f(t) = c$, con un inerzia tale che: $u_2(t) = 3\exp(-4t) + .5\exp(-t)\sin(4t)$, e con $a = 0$; allora si avrà la seguente funzione: $p = \dfrac{1}{1 + 3\exp(-4t) + .5\exp(-t)\sin(4t)}$. Vedi nella figura 1 la funzione in rosso.

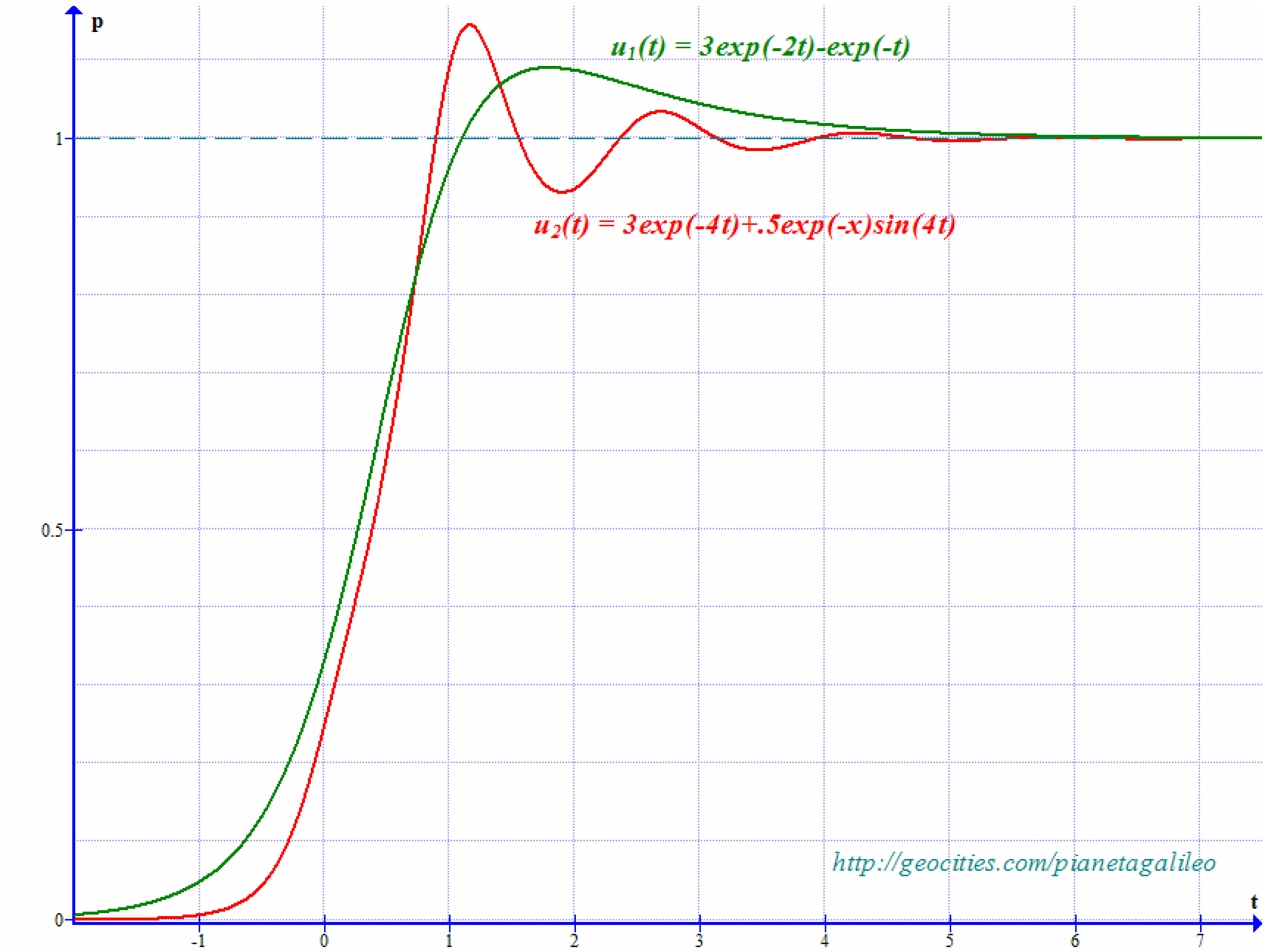


Figura 1 - Due esempi di sviluppo di una popolazione con un inerzia $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Conclusioni

Nel semplice modello di crescita esponenziale di Malthus per esempio una popolazione di una specie qualsiasi se può avere accesso ad una fonte energetica illimitata e ad un ambiente privo di limitazioni seguirà una crescita in relazione ad una funzione di inerzia composta da un singolo esponenziale. Nel caso della funzione logistica l'inerzia della popolazione rimane la stessa di quella del modello di Malthus, ma in più si tiene conto di limitazioni tali da stabilizzare il fenomeno di crescita (o decrescita). Il concetto fondamentale qui è la funzione di inerzia demografica, che nella maggior parte dei casi non è composta da una singola funzione esponenziale, ma bensì dalla somma di una serie di funzioni descritte dalle possibili soluzioni della (9). Questo può valere naturalmente anche per il caso di dinamiche di libero sviluppo di tipo Maltusiano, solo che nella maggioranza dei casi con il passare del tempo da un punto di vista pratico c'è un semplice esponenziale che prevalendo su tutte le altre funzioni fornisce al fenomeno la sua evoluzione tipica.

Bibliografia

Zwirner G.- Lezioni di analisi matematica: parte seconda, Ed. Cedam Padova 1976

Comincioli V - Problemi e modelli matematici nelle scienze applicate, Ed. Ambrosiana 1993

Murray J.D. : Mathematical Biology I: An Introduction, Springer Verlag 2002