# Curiosità matematiche

di Michele T. Mazzucato

scritto dedicato alla memoria della Prof.ssa Luciana Parducci (1923-1997)

"The light that failed"
dal titolo di un'opera di Joseph Rudyard Kipling (1865-1936) del 1891



## Alcune costanti matematiche

Base del logaritmi neperiani, dal nome del matematico scozzese Napier:

$$e = 1+\tfrac{1}{1}!+\tfrac{1}{2}!+\tfrac{1}{3}!+\tfrac{1}{4}!+\tfrac{1}{5}!+\tfrac{1}{6}!+... = \quad 2.718281828459...$$

Modulo dei logaritmi di Briggs:

$$\lg = m = \quad 0.434294482...$$

Radiante espresso in:
gradi (180/π) =     57°.29577951 = 57° 17′ 44″.806220
primi ....... =   3437′.746770
secondi ..... = 206264″.806220

Arco di un (espresso in radianti):
grado (π/180) = 0.017453293
primo .......= 0.000290888
secondo ......= 0.000004848

Pi greco
π = 3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 …

Teoria degli errori:
rapporto costante tra l'errore medio e l'errore probabile = 1.483
inverso del precedente = 0.674

valore del prodotto costante della misura di precisione:
per l'errore medio = $2^{-0.5}$ = 0.707
per l'errore probabile = 0.477

probabilità che l'errore di un'osservazione non superi:
metà dell'errore medio = 0.382
l'errore medio = 0.663
il doppio dell'errore medio = 0.954

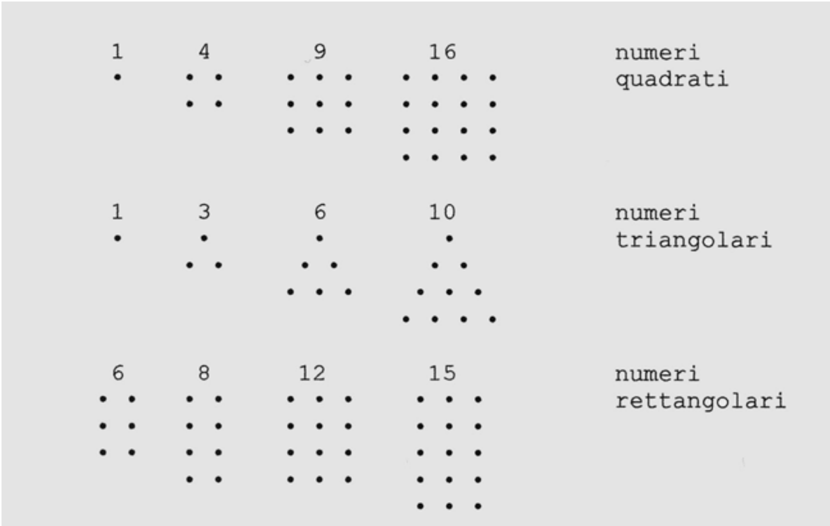
## Prefissi per le unità di misura

| | | | |
|---|---|---|---|
| yotta- | moltiplica per | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 | $= 10^{24}$ |
| exa- | moltiplica per | 1 000 000 000 000 000 000 | $= 10^{18}$ |
| peta- | moltiplica per | 1 000 000 000 000 000 | $= 10^{15}$ |
| tera- | moltiplica per | 1 000 000 000 000 | $= 10^{12}$ |
| giga- | moltiplica per | 1 000 000 000 | $= 10^{9}$ |
| mega- | moltiplica per | 1 000 000 | $= 10^{6}$ |
| kilo- | moltiplica per | 1 000 | $= 10^{3}$ |
| etto- | moltiplica per | 1 00 | $= 10^{2}$ |
| deca- | moltiplica per | 1 0 | = 10 |
| deci- | moltiplica per | 0,1 | $= 10^{-1}$ |
| centi- | moltiplica per | 0,01 | $= 10^{-2}$ |
| milli- | moltiplica per | 0,001 | $= 10^{-3}$ |
| micro- | moltiplica per | 0,000 001 | $= 10^{-6}$ |
| nano- | moltiplica per | 0,000 000 001 | $= 10^{-9}$ |
| pico- | moltiplica per | 0,000 000 000 001 | $= 10^{-12}$ |
| femto- | moltiplica per | 0,000 000 000 000 001 | $= 10^{-15}$ |
| atto- | moltiplica per | 0,000 000 000 000 000 001 | $= 10^{-18}$ |
| yocto- | moltiplica per | 0,000 000 000 000 000 000 000 001 | $= 10^{-24}$ |

## I primi 1000 numeri primi

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
| 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 |
| 97 | 101 | 103 | 107 | 109 | 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 |
| 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 |
| 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 |
| 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 | 353 | 359 |
| 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 |
| 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 |
| 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 |
| 599 | 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 |
| 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 |
| 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 | 811 | 821 | 823 | 827 |
| 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 |
| 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |

## Aritmogeometria pitagorica




Esistono dei numeri multiformi come, ad esempio, il 36, che è quadrato, rettangolare e triangolare.

## Crivello di Eratostene di cirene

E' un metodo che permette di trovare i numeri primi (numeri divisibili esattamente per se stessi e per l'unità) inferiori ad un numero dato, appartenente alla sequenza dei numeri dispari. Il metodo consiste nello scrivere i numeri dispari inferiori ad un dato numero e nel cancellare di tre in tre quelli dopo il 3, di cinque in cinque quelli dopo il 5 e così via. Quelli rimanenti sono i numeri primi cercati.

Esempio, nella sequenza fino al numero dato 51: 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 … cancellando, come descritto in precedenza, rimangono solamente 2 3 5 7 - 11 13 - 17 19 - 23 - - 29 31 - - 37 - 41 43 - 47 - - … che sono i numeri primi cercati.

## Fattoriale

Il fattoriale di un numero intero n è il prodotto dei numeri interi da 1 a n.

| |
|---|
| **0! = 1** |
| **1! = 1** |
| **2! = 1·2 = 2** |
| **3! = 1·2·3 = 6** |
| **4! = 1·2·3·4 = 24** |

Nel calcolo combinatorio il fattoriale di un numero n dà il numero delle permutazioni di n oggetti.

Esempio:
a,b,c (n=3)  3! = 1·2·3 = 6 [ossia abc, bca, cab, acb, cba, bac]

I fattoriali dei numeri da 1 a 10 sono:

| | |
|---|---|
| **0!** | **1** |
| **1!** | **1** |
| **2!** | **2** |
| **3!** | **6** |
| **4!** | **24** |
| **5!** | **120** |
| **6!** | **720** |
| **7!** | **5 040** |
| **8!** | **40 320** |
| **9!** | **362 880** |
| **10!** | **3 628 800** |

## Numeri amicabili

Due numeri interi **a** e **b**, vengono detti numeri amicabili se **a** è la somma dei divisori di **b** e **b** è la somma dei divisori di **a.** I più piccoli numeri che forniscono una coppia del genere sono:

**220** = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284

**284** = 1+2+4+71+142 = 220

altre coppie:

| | | |
|---|---|---|
| 220 | e | 284 (P. de Fermat, 1636) |
| 1184 | e | 1210 (N. Paganini, 1798) |
| 2620 | e | 2924 |
| 5020 | e | 5564 |
| 6232 | e | 6368 |
| 10744 | e | 10856 |
| 12285 | e | 14595 |
| 17296 | e | 18416 (P. de Fermat, 1636) |
| 63020 | e | 76084 |
| 66928 | e | 66992 |
| 67095 | e | 71145 |
| 69615 | e | 87633 |
| 122265 | e | 139815 |
| 141664 | e | 153176 |
| 142310 | e | 168730 |
| 171856 | e | 176336 |
| 176272 | e | 180848 |
| 196724 | e | 202444 |
| 308620 | e | 389924 |
| 437456 | e | 455344 |
| 503056 | e | 514736 |
| 522405 | e | 525915 |
| 609928 | e | 686072 |
| 1175265 | e | 1438983 |
| 1280565 | e | 1340235 |
| 1358595 | e | 1486845 |
| 9363584 | e | 9437056 (R. Descartes) |
| 196421715 | e | 224703405 |

## Numeri multiperfetti

I numeri multiperfetti sono quelli in cui la somma dei divisori, con l'aggiunta del numero stesso, fornisce un valore multiplo intero del numero. Il multiplo diviso per il numero, definisce l'ordine che può essere di tre (o triperfetto), di quattro (o tetraperfetto), di cinque (o pentaperfetto), etc.

Esempio:
120 (1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120= 360)
(360/120 = 3 multiperfetto di ordine tre o triperfetto)

| | |
|---|---|
| numeri triperfetti: | |
| 1° (R. Recorde, 1557) | $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ |
| 2° (P. de Fermat, 1636) | $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ |
| 3° (Jumeau, 1638) | $2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ |
| 4° (R. Descartes, 1638) | $2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ |
| 5° (M. Mersenne, 16838) | $2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$ |
| 6° (P. de Fermat, 1643) | $2^{143} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$ |
| numeri tetraperfetti: | |
| 1° (R. Descartes, 1638) | $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ |
| 2° (R. Descartes, 1638) | $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ |
| 3° (R. Descartes, 1638) | $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$ |
| 4° (R. Descartes, 1638) | $2^9 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$ |
| 5° (R. Descartes, 1638) | $2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ |
| 6° (E. Lucas, 1891) | $2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$ |
| 7° (M. Mersenne, 1639) | $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$ |
| 8° (M. Mersenne, 1639) | $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 89$ |
| numeri pentaperfetti: | |
| 1° (R. Descartes, 1638) | $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$ |
| 2° (B. Frénicle, 1638) | $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$ |
| 3° (R. Descartes, 1639) | $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ |
| 4° (D.N. Lehmer, 1900) | $2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$ |

**Numeri narcisisti**

I numeri narcisisti sono quelli in cui la somma delle loro cifre, ciascuna elevata alla terza potenza, dà lo stesso numero iniziale.

| | | |
|---|---|---|
| esempio: | 153 | $= 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ |
| | 370 | $= 3^3 + 7^3 + 0^3 = 370$ |
| | 371 | $= 3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$ |
| | 407 | $= 4^3 + 0^3 + 7^3 = 407$ |

**Numeri perfetti**

I numeri perfetti sono quelli in cui la somma dei loro divisori (prima specie) o il prodotto dei fattori (seconda specie) è uguale al numero stesso.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | 6 ........ (1+2+3) | $2^1 \cdot (2^2-1)$ | (1+2+3) |
| 2° | 28 ....... (1+2+4+7+14) | $2^2 \cdot (2^3-1)$ | (1+2+3+4+..+7) |
| 3° | 496 ...... (1+2+4+16+31+62+124) | $2^4 \cdot (2^5-1)$ | (1+2+3+4+..+31) |
| 4° | 8128 | $2^6 \cdot (2^7-1)$ | (1+2+3+4+..+127) |
| 5° | 33 550 336 | $2^{12} \cdot (2^{13}-1)$ | |
| 6° | 8 489 869 056 | $2^{16} \cdot (2^{18}-1)$ | |
| 7° | 137 438 691 328 | | |
| 8° | 2 305 843 008 139 952 128 | | |
| 9° | 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176 | | |

esempio: $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\quad 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ |seconda specie
$10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$ $\quad 14 = 1 \cdot 2 \cdot 7 = 14$ |

32° (2^756839)-1·2^756839
33° (2^859433)-1·2^859433 di 517430 cifre [1995]

**Numeri socievoli**

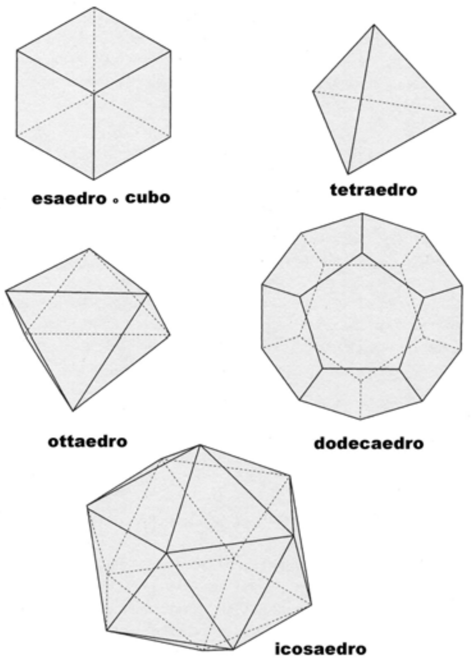
Se si sommano i divisori del primo numero si ottiene il secondo, se si sommano i divisori del secondo si ottiene il terzo e cosi via sino a che sommando i divisori dell'ennesimo numero si ottiene di nuovo il primo.

Esempio:
12496, 14288, 15472, 14536 e 14264 (cerchio di 5 numeri)

Il cerchio più ampio di numeri socievoli include 28 numeri, il primo dei quali è 14316.

## Poliedri regolari

Vengono anche chiamati Corpi Cosmici o Solidi Platonici (hanno facce di poligoni regolari con gli angoli diedri uguali).




| | tetraedro | esaedro | ottaedro | dodecaedro | icosaedro |
|---|---|---|---|---|---|
| **facce (f)** | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 |
| **vertici (v)** | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| **spigoli (s)** | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| **lati x faccia** | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 |

Relazione di EULER o di DESCARTES: $f+v=s+2$

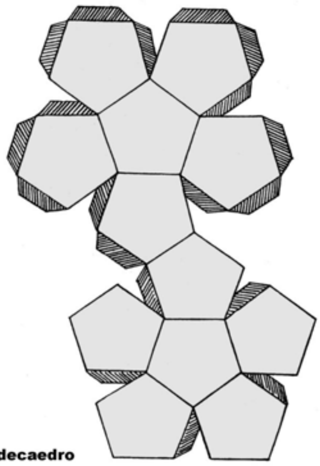
| | | superficie | | volume | |
|---|---|---|---|---|---|
| tetraedro ..... | = | $\sqrt{3}\cdot l^2$ | $[1.73\cdot l^2]$ | $(\sqrt{2}/12)\cdot l^3$ | $[0.12\cdot l^3]$ |
| esaedro........ | = | $6\cdot l^2$ | | $l^3$ | |
| ottaedro ...... | = | $2\cdot\sqrt{3}\cdot l^2$ | $[3.46\cdot l^2]$ | $(\sqrt{2}/3)\cdot l^3$ | $[0.47\cdot l^3]$ |
| dodecaedro .... | = | $3\cdot(\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}})\cdot l^2$ | $[20.6\cdot l^2]$ | $1/4\cdot(15+7\cdot\sqrt{5})\cdot l^3$ | $[7.66\cdot l^3]$ |
| icosaedro ..... | = | $5\cdot l^2\cdot\sqrt{3}$ | $[8.66\cdot l^2]$ | $(5\cdot l^3/12)\cdot(3+\sqrt{5})$ | $[2.18\cdot l^3]$ |

rapporto tra il lato e il diametro per ciascuno dei solidi regolari iscritti:

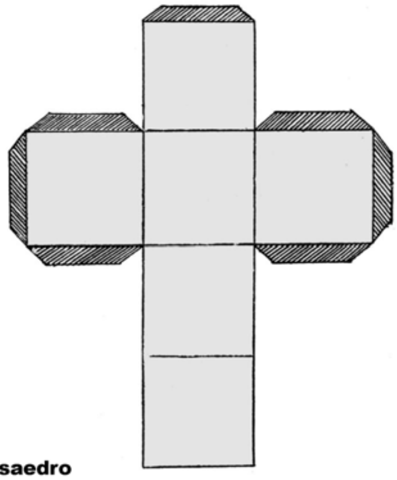
| | | |
|---|---|---|
| tetraedro .......... | = | $\sqrt{2/3}$ |
| ottaedro ........... | = | $\sqrt{1/2}$ |
| esaedro o cubo ..... | = | $\sqrt{1/3}$ |
| icosaedro .......... | = | $\sqrt{[(5-\sqrt{5})/10]}$ |
| dodecaedro ......... | = | $(\sqrt{5}-1)/2\cdot\sqrt{3}$ |

Il rapporto fra le superfici del dodecaedro e dell'icosaedro inscritti nella medesima sfera è uguale al rapporto tra i loro volumi, e tale rapporto risulta essere quello che esiste tra il lato dell'esaedro e il lato dell'icosaedro, ossia: $\sqrt{\{(10/[3\cdot(5-\sqrt{5})]\}}$. I poliedri semiregolari (o Solidi Archimedei) sono poliedri convessi le cui facce sono dei poligoni regolari ma non dello stesso tipo. Sono possibili solo tredici poliedri semiregolari.

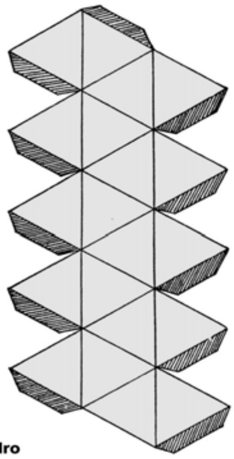
Come costruire modelli in cartone dei cinque poliedri regolari convessi:



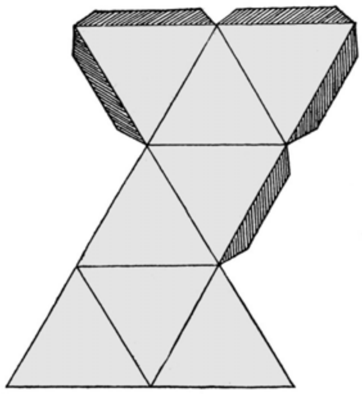
**dodecaedro**



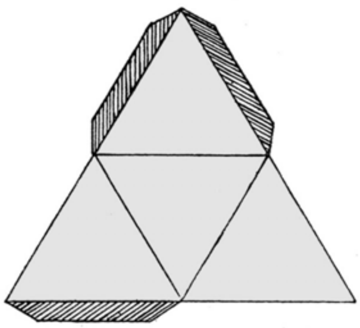
**esaedro**



**icosaedro**



**ottaedro**



**tetraedro**

**<u>Politopi regolari</u>** (figure geometriche quadrimensionali)

PENTACELLULA: analogo al tetraedro. Il relativo diagramma di Schlegel (proiezione dei poliedri sul piano) è costituito da un tetraedro e da un punto interno, nonché dagli spigoli che si ottengono congiungendo questo punto con i quattro vertici del tetraedro.
IPERCUBO o TESSARATTO: ci appare costituito da due cubi uno interno all'altro e dagli spigoli che si ottengono congiungendo i loro vertici limitato da otto cubi (24 facce, 16 vertici e 8 spigoli). (un pentaratto è un quadrato a cinque dimensioni formato da 8 tessaratto o 64 cubi).
SEDICI-CELLULA: ci appare come un tetraedro contenuto in un secondo tetraedro. I vertici di questi due tetraedri sono collegati da segmenti. Essa sarà limitata da 16 tetraedri e 32 triangoli equilateri (24 spigoli e 8 vertici).
VENTIQUATTRO-CELLULA: ci appare formata da un ottaedro contente al suo interno un cubo ottaedro e, dentro questo, un secondo ottaedro. Essa sarà limitata da 104 ottaedri, 96 triangoli equilateri (96 spigoli e 24 vertici).
CENTOVENTI-CELLULA: è limitata da 120 pentagoni dodecaedri e 720 pentagoni (1200 spigoli e 600 vertici).
SEICENTO-CELLULA: è limitata da 600 tetraedri, 1200 triangoli equilateri (720 spigoli e 120 vertici).

## Problemi classici dell'antichità

Questi tre problemi dovevano essere costruiti mediante il solo uso della riga e del compasso (2200 anni dopo fu dimostrato che ciò non era possibile).
**1)** quadratura del cerchio (1° problema di Atene): dato un cerchio costruire un quadrato con l'area esattamente uguale a quella del cerchio.
**2)** trisezione dell'angolo (2° problema di Atene): dato un angolo qualsiasi, costruire un altro angolo la cui ampiezza sia un terzo dell'angolo dato.
**3)** duplicazione del cubo (problema di Delo): dato un lato di un cubo, costruire il lato di un secondo cubo il cui volume sia il doppio del primo.

## Problemi di Leonardo da Vinci

**(1)** Pensa ad un numero qualsiasi, moltiplicalo per due e aggiungi cinque. Ora moltiplicalo per cinque, aggiungi dieci e moltiplica per dieci. Dimmi il risultato. (se dal risultato si sottrae 350 e si divide per 100 si ottiene il numero pensato).

**(2)** Si cerchi di formare un'espressione utilizzando le nove cifre fondamentali e in ordine crescente in modo da avere come risultato il valore 100 e adoperando soltanto i segni + e -. (Una soluzione è: 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100)

## Prova del nove

Consiste nell'effettuare la somma delle cifre di ciascun dato dell'operazione fino ad ottenere un numero di una sola cifra. Si esegue poi, sui numeri ottenuti, l'operazione relativa considerando che se nei passaggi si ottengono numeri di più di due cifre si sostituisce ad essi la somma delle cifre stesse. La prova è valida se il risultato così ottenuto è uguale alla somma delle cifre del risultato dell'operazione data. Se la prova del nove riesce, l'operazione può essere esatta (ma talora può essere errata), se non riesce l'operazione è senz'altro errata.

```
esempio:     815  +  9 8+1+5 = 14 9 1+4 = 5
             311  +  9 3+1+1           = 5
             425  +  9 4+2+5 = 11 9 1+1 = 2
              38  =  9 3+8   = 11 9 1+1 = 2
            -------                   ------
            1589   9 1+5+8+9 = 23       14 9 1+4
                                8              8
                                5     =        5
```

## Quadrati magici

Un classico quadrato magico di ordine quattro lo troviamo in alto a destra nell'incisione intitolata *Melencolia* (1514) di DÜRER la cui somma di ogni colonna, riga, e diagonali principali è sempre 34. I numeri 15 e 14 in basso nel quadrato indicano l'anno di realizzazione dell'opera.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **16** | **03** | **02** | **13** |
| **05** | **10** | **11** | **08** |
| **09** | **06** | **07** | **12** |
| **04** | **15** | **14** | **01** |

In un quadrato magico, la somma dei numeri in ciascuna linea (orizzontale, verticale e diagonale) è sempre la stessa e corrisponde alla costante magica del quadrato la cui formula è $n \cdot (n^2+1)/2 \cdot$ dove n è il lato del quadrato in considerazione.

| ordine | costante magica | quadrato di |
|---|---|---|
| 3 | 15 | Saturno |
| 4 | 34 | Giove |
| 5 | 65 | Marte |
| 6 | 111 | Sole |
| 7 | 175 | Venere |
| 8 | 260 | Mercurio |
| 9 | 369 | Luna |

Ecco un gioco con un quadrato non magico: mettere in una busta chiusa un foglietto con il numero 57. Far coprire un numero della tabella, quindi cancellare gli altri numeri della stessa riga e colonna. Fare coprire uno dei numeri rimasti e ripetere l'operazione. Continuare fino alla quinta cifra coperta. Fare sommare i numeri coperti. Il risultato sarà 57.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **19** | **08** | **11** | **25** | **07** |
| **12** | **01** | **04** | **18** | **00** |
| **16** | **05** | **08** | **22** | **04** |
| **21** | **10** | **13** | **27** | **09** |
| **14** | **03** | **06** | **20** | **02** |

## Semifattoriale

Il semifattoriale è il numero che si ottiene facendo il prodotto dei primi n/2 pari della sequenza dei numeri interi se n è pari, e dei primi (n+1)/2 dispari se invece n è dispari.

$8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384 \qquad 11!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10395$

## Sequenze

numeri interi .......: 1,2,3,4,5, ......n
pari .........: 2,4,6,8,10, .... 2·n
dispari ......: 1,3,5,7,9,...... 2·n-1
triangolari ..: 1,3,6,10,15,.... n·(n+1)/2
quadrati .....: 1,4,9,16,25,.... $n^2$
pentagonali ..: 1,5,12,22,35,... n·(3·n-1)/2
esagonali ....: 1,6,15,28,25,... n·(4·n-2)/2
ettagonali ...: 1,7,18,34,55,... n·(5·n-3)/2
ottagonali ...: 1,8,21,40,65,... n·(6·n-4)/2
nonagonali ...: 1,9,24,46,75,... n·(7·n-5)/2
cubica .......: 1,8,27,64,125,.. $n^3$
tetraedrici ..: 1,4,10,20,35,... n·($n^2$+3n+2)/6

3·n-2 ........: 1,4,7,10,13,.... 3·n-2
4·n-3 ........: 1,5,9,13,17,.... 4·n-3
2^(n-1) ......: 1,2,4,,8,16,.... $2^{(n-1)}$
: 1,8,30,80,...... [($n^3$+$n^2$)·(n+2)]/6

esempio: alla 4^ posizione dei numeri quadrati vi è il numero 16.

somma dei numeri della sequenza fino alla posizione n

numeri interi .......: 1+2+3+4+ .... n·(n+1)/2
pari .........: 2+4+6+8+ .... n·(n+1)
dispari ......: 1+3+5+7+ .... $n^2$
quadrati .....: 1+4+9+16+ ... [($n^2$+n)·(2·n+1)]/6
cubici : 1+8+27+ ... $[n·(n+1)/2]^2$

1+q+ ... + $q^n$ : (1-$q^n$+1)/(1-q) con q diverso da 0

3·n-2 ....: 1+4+7+10+ ... n·(3·n-1)/2
4·n-3 ....: 1+5+9+13+ ... 2·$n^2$-n
$2^{(n-1)}$ .....: 1+2+4+8+ .... $2^{(n-1)}$·2-1
: 1+8+30+ ..... [($n^2$+n)·(n+2)·(n+3)·(4·n+1)]/120

## **Successione di FIBONACCI e sezione aurea**

Dalla successione del matematico pisano FIBONACCI 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … (ogni numero è la somma dei due precedenti), si prendano due numeri consecutivi, si esegua la loro divisione e moltiplichiamo, il risultato, per 360° (se questo risulta maggiore di 180° si sottrae a 360°).

Esempio:
34 e 55 34/55= 0.61 81 81 81 … · 360° = 222°.54 54 …
360° - 222°.54 54 … = 137°.45 45 …

Il rapporto tra i numeri della successione di Fibonacci, a mano a mano che essi crescono, diventa sempre più vicino al valore di 0.618034, ossia a (√5-1)/2 la sezione aurea indicata dai Greci con Φ. Questa è uguale sia a 1+Φ che a 1/Φ. Se si considera nell'altro senso (55/34= 1.61764705 …) allora il limite al quale tende il rapporto tra due numeri consecutivi sempre più grandi della successione di FIBONACCI è 1.618034, ossia (√5+1)/2, la sezione aurea. I teorici sanno da molto tempo che il numero più irrazionale è la sezione aurea (rapporto fra l'intero e la sua parte). I rapporti 2/3, 3/5, etc. sono approssimazioni razionali che si avvicinano, senza mai diventare uguali a Φ. Possiamo misurare la irrazionalità di Φ osservando la rapidità con cui la differenza, tra queste frazioni e Φ, si riduce avvicinandosi più lentamente per Φ che per qualsiasi altro numero irrazionale. Abbiamo anche l'angolo aureo che è dato da 360°·(1-Φ)= 137°.50776 …

I primi 30 numeri della successione di FIBONACCI sono:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| 89 | 144 | 233 | 377 | 610 | 987 | 1597 | 2584 | 4181 | 6765 |
| **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| 10946 | 17711 | 28657 | 46368 | 75025 | 121393 | 196418 | 317811 | 514229 | 832040 |

## Terne pitagoriche

Ai pitagorici veniva attribuita la scoperta della regola delle terne pitagoriche $x^2+y^2=z^2$ formate da:

$$(m^2-1)/2 \; ; \; m \; ; \; (m^2+1)/2 \quad \text{dove } m \text{ è un numero intero dispari}$$

sono terne pitagoriche: 3,4 e 5 ; 5,12 e 13 ; 12,35 e 37 ; 99,4900 e 4901.

Pitagora diede $x= 2n+1$
$n= 1,2,3,4,....$ $y= 2n(n+1)$
$z= n^2+(n+1)^2$

n=1 3- 4- 5
n=2 5-12-13
n=3 7-24-25
n=4 9-40-41
n=5 11-60-61

Platone diede $x= n^2-1$
$n= 2,3,4,...$ $y= 2n$
$z= n^2+1$

n=2 3- 4- 5
n=3 8- 6-10
n=4 15- 8-17
n=5 35-12-37

$x^2 + y^2 = z^2$
$x^3 + y^3 = z^3$ L. Euler, 1738
$x^4 + y^4 = z^4$ B. Frénicle de Bessy, 1676
$x^5 + y^5 = z^5$ S. Germain, 1808

Alcune terne pitagoriche sotto i 100:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3; 4; 5 | 5; 12; 13 | 8; 15; 17 | 7; 24; 25 |
| 9; 40; 41 | 11; 60; 61 | 12; 35; 37 | 13; 84; 85 |
| 16; 63; 65 | 20; 21; 29 | 28; 45; 53 | 33; 56; 65 |
| 36; 77; 85 | 39; 80; 89 | 48; 55; 73 | 65; 72; 97 |

## Triangolo aritmetico e quadrato di Fermat

Il triangolo aritmetico viene anche denominato di Pascal (in Francia) o di Tartaglia (in Italia). Esprime la serie dei coefficienti dei termini dello sviluppo del binomio di Newton $(x\pm y)^n$ messo sotto forma di triangolo.

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

Può essere anche scritta in questo modo. Sommandone i termini in senso parallelo alla bisettrice dell'angolo retto, si hanno i termini della serie di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Nel quadrato di FERMAT, ogni numero che occupa una casella è dato dalla somma dei due numeri che si trovano nella casella alla sua sinistra e in quella sopra di esso. Deriva dalla diversa disposizione in forma scalare dei coefficienti binominali di PASCAL vista precedentemente.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | |
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | | |

espansione completa di $(x+y)^n$ con n da 2 a 10:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$
$(x+y)^7 = x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$
$(x+y)^8 = x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8$
$(x+y)^9 = x^9+9x^8y+36x^7y^2+84x^6y^3+126x^5y^4+126x^4y^5+84x^3y^6+36x^2y^7+9xy^8+y^9$
$(x+y)^{10} = x^{10}+10x^9y+45x^8y^2+120x^7y^3+210x^6y^4+252x^5y^5+210x^4y^6+120x^3y^7+45x^2y^8+10xy^9+y^{10}$

## Varie

****** prodotti singolari

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$
$$12345679 \cdot 8 = 98765432$$

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$
$$123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111$$

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \cdot 8 + 8 = 987654321$$

****** Il prodotto del numero 12345679 per 9 (o un suo multiplo non superiore a 81) ha le cifre tutte uguali.

$$12345679 \cdot 9 = 111\ 111\ 111$$
$$12345679 \cdot 18 = 222\ 222\ 222$$
$$12345679 \cdot 27 = 333\ 333\ 333$$
$$12345679 \cdot 36 = 444\ 444\ 444$$
$$12345679 \cdot 45 = 555\ 555\ 555$$
$$12345679 \cdot 54 = 666\ 666\ 666$$
$$12345679 \cdot 63 = 777\ 777\ 777$$
$$12345679 \cdot 72 = 888\ 888\ 888$$
$$12345679 \cdot 81 = 999\ 999\ 999$$

****** Il quadrato di un numero formato da cifre tutte uguali a 1 (non più di 9) si ottiene scrivendo il numero delle cifre 1 del numero stesso e facendolo precedere e seguire dalla successione delle cifre minori, in ordine decrescente, sino ad 1.

| | | |
|---|---|---|
| $11^2$ | = | 1 2 1 |
| $111^2$ | = | 1 2 3 2 1 |
| $1111^2$ | = | 1 2 3 4 3 2 1 |
| $11111^2$ | = | 1 2 3 4 5 4 3 2 1 |
| $111111^2$ | = | 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1 |
| $1111111^2$ | = | 1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1 |
| $11111111^2$ | = | 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1 |
| $111111111^2$ | = | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 |

** I numeri di tre cifre che ammettono i fattori 7, 11 e 13 (il cui prodotto è 1001) danno prodotti composti da gruppi uguali di tre cifre.

| |
|---|
| **231 x 741 = 171 171** |
| **(231= 3x7x13 e 741= 3x13x19)** |
| **429 x 588 = 252 252** |
| **468 x 539 = 252 252** |
| **294 x 858 = 252 252** |
| **182 x 704 = 128 128** |
| **672 x 858 = 576 576** |

** Metodo dei contadini russi per la moltiplicazione.
Si scrive sotto il moltiplicando (si prende il numero più piccolo) la metà (per difetto se dispari) poi sempre in colonna la metà di questa e così via sino ad ottenere il numero 1. Accanto al moltiplicando si scrive il moltiplicatore sotto a questo il suo doppio, poi sempre in colonna e in corrispondenza ai numeri della prima, si scrive il doppio del numero ottenuto e si continua raddoppiando sempre finché si giunge in corrispondenza dell'1 della prima colonna.

| |
|---|
| **48 143** |
| **24 286** |
| **12 572** |
| **6 1144** |
| **3 2288** |
| **1 4576** |
| |
| **2288 + 4576 = 6864 = 48·143** |

La somma dei numeri della seconda colonna che corrispondono ai numeri dispari della prima è il prodotto dei numeri dati.

** Il numero 142857 (periodo della frazione 1/7) moltiplicato per 1, 2, 3, 4, 5 e 6, dà dei prodotti composti dalle medesime cifre e che queste si susseguono in ordine circolare.

| |
|---|
| **142857 x 1 = 142 857** |
| **142857 x 2 = 285 714** |
| **142857 x 3 = 428 571** |
| **142857 x 4 = 571 428** |
| **142857 x 5 = 714 285** |
| **142857 x 6 = 857 142** |
| **inoltre** |
| **142857 x 7 = 999 999** |

** Nella progressione aritmetica ÷ 3·6·9·12·15·18·21·…·27 se si moltiplica ciascun termine per 37 si ottiene 111·222·333·444·555·…·999 e ciascuno di questi prodotti è costituito da tre cifre uguali e tali che la loro somma è uguale al moltiplicatore da cui derivano.

** Se si effettua la sottrazione

| |
|---|
| **9 8 7 6 5 4 3 2 1 -** |
| **1 2 3 4 5 6 7 8 9 =** |
| **-------------------** |
| **8 6 4 1 9 7 5 3 2** |

si ottiene un numero costituito dalle stesse nove cifre, ma in ordine diverso.

** Moltiplicazione di un numero formato da cifre tutte uguali fra loro per un numero formato da cifre tutte uguali a 9 (dal *Talkhys* di IBN AL-BANNA XIII secolo).

- si scrivono i due numeri in colonna;
- se i due numeri non hanno lo stesso numero di cifre, al disotto di quelle che non hanno corrispondenti in colonna, si scrivono altrettante cifre 9;
- a questo gruppo di cifre si fanno precedere tante cifre uguali alle restanti del primo numero, salvo l'ultima che va diminuita di 1 e si fanno seguire i complementi a 9 delle cifre del gruppo ultimamente scritto.

| | | |
|---|---|---|
| **77777 x** | **888 x** | **666 x** |
| **999 =** | **99999 =** | **999 =** |
| **----------** | **----------** | **---------** |
| **77699223** | **88799112** | **665334** |

** Il prodotto di un numero qualunque per 11. Si ottiene sommando le cifre contigue del numero a partire da destra, supponendo però che il numero sia seguito e preceduto da un zero.

| |
|---|
| **(0) 7 8 6 5 4 (0) x 11 = 8 6 5 1 9 4** |
| |
| **0 + 4 = 4** |
| **4 + 5 = 9** |
| **5 + 6 = 11 si scrive 1 e si riporta 1** |
| **1 + 6 + 8 = 15 si scrive 5 e si riporta 1** |
| **1 + 8 + 7 = 16 si scrive 6 e si riporta 1** |
| **1 + 7 + 0 = 8** |

** Prendendo un qualsiasi numero di 5 cifre, riordinare queste cifre in modo da ottenere un qualsiasi altro numero, sottrarre il più piccolo dal più grande ed, infine, sommare tutte le cifre della differenza; si otterrà sempre la stessa radice numerica 9.

Esempio:
87215 - 72158 = 15057  9  1+5+0+5+7 = 18  9  1+8 = 9

** Se si sommano tutte le cifre di un qualsiasi numero e poi si sommano le cifre di questa somma e continuando con questo procedimento finché rimane una sola cifra: questa cifra, detta radice numerica del numero originale, è uguale al resto della divisione del numero originale per 9.

Esempio:
87215 = 8+7+2+1+5 = 23 = 2+3 = 5 (radice numerica)
87215/9 = 9690.555 555 …    9690·9 = 87210
87215 - 87210 = 5 (radice numerica).

** Moltiplicando il numero 143 per ciascuno dei 999 primi multipli di 7, ognuno dei prodotti ottenuti sarà costituito da due numeri identici corrispondenti precisamente al numero d'ordine del multiplo di 7 usato come moltiplicatore.

Inoltre, quando si tratti di un multiplo di 7, il cui ordine sia dato da un numero avente meno di tre cifre, le due parti del prodotto potranno essere separate da uno o più zeri.

Esempio:
$143\cdot(238\cdot7)= 238238$ e $143\cdot(26\cdot)= 26026$

** Si prenda quattro valori interi consecutivi, moltiplichiamoli fra loro, aggiungiamoci 1 e si otterrà un quadrato perfetto.

Esempio:
$8\cdot9\cdot10\cdot11= \sqrt{7921} = 89$

** Prendiamo un numero intero qualsiasi, sommiamo i quadrati delle sue cifre e proseguiamo in questo modo fino a che non rimane una cifra.

Esempio:
$3452= 3^2+4^2+5^2+2^2 = 54 = 5^2+4^2 = 44 = 4^2+4^2 =$
$32 = 3^2+2^2 = 13 = 1^2+3^2 = 10 = 1^2+0^2 = 1$

Qualunque sia il numero iniziale, alla fine si possono avere solo due risultati o 1 oppure 145. La seconda possibilità è ciclica perché il 145 si ripete con la stessa sequenza di 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145, …

** Il più grande numero primo conosciuto è stato scoperto da SLOWINSKI e GAGE (1994) ed corrisponde al 2^859433 -1 (258 716 cifre).

** Il massimo numero esprimibile con tre cifre è 9^9^9. Questo numero è composto da 369693100 cifre, la cui prima è un 4 e l'ultima è un 9.

** Il prodotto dei 100000 primi numeri interi è un numero composto da 456572 cifre.

** Il numero 30! (fattoriale di 30) ha 33 cifre e il numero 2^2^36 ne ha più di venti milioni.

** La somma delle decime potenze dei primi 1000 numeri interi è un numero composto da 32 cifre.

** Per avere il numero delle cifre che compongono la sequenza dei numeri interi fino al dato numero, basta moltiplicare il numero dato più 1 per il numero delle cifre che compongono il numero stesso e sottrarre, dal prodotto, un numero formato da tanti 1 quante sono le cifre del numero dato.

Esempio:
n= 200 formato da 3 cifre
$(200+1)\cdot3= 603 - 111 = 492$

** Il numero 1729 è l'ultimo numero intero che si può rappresentare in due maniere diverse come la somma di due cubi:

$$1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$$

** Il numero $10^{100}$ è chiamato per convenzione Googol.

** Indovinare un numero pensato con l'uso di colonne.

- pensare ad un numero;
- indicare le colonne in cui il numero si trova;

La soluzione del numero pensato è la somma dei numeri che si trovano in cima a ciascuna colonna in cui esso si trova.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 33 | 17 | 9 | 5 | 3 | 3 |
| 34 | 18 | 10 | 6 | 6 | 5 |
| 35 | 19 | 11 | 7 | 7 | 7 |
| 36 | 20 | 12 | 12 | 10 | 9 |
| 37 | 21 | 13 | 13 | 11 | 11 |
| 38 | 22 | 14 | 14 | 14 | 13 |
| 39 | 23 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 40 | 24 | 24 | 20 | 18 | 17 |
| 41 | 25 | 25 | 21 | 19 | 19 |
| 42 | 26 | 26 | 22 | 22 | 21 |
| 43 | 27 | 27 | 23 | 23 | 23 |
| 44 | 28 | 28 | 28 | 26 | 25 |
| 45 | 29 | 29 | 29 | 27 | 27 |
| 46 | 30 | 30 | 30 | 30 | 29 |
| 47 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| 48 | 48 | 40 | 36 | 34 | 33 |
| 49 | 49 | 41 | 37 | 35 | 35 |
| 50 | 50 | 42 | 38 | 38 | 37 |
| 51 | 51 | 43 | 39 | 39 | 39 |
| 52 | 52 | 44 | 44 | 42 | 41 |
| 53 | 53 | 45 | 45 | 43 | 43 |
| 54 | 54 | 46 | 46 | 46 | 45 |
| 55 | 55 | 47 | 47 | 47 | 47 |
| 56 | 56 | 56 | 52 | 50 | 49 |
| 57 | 57 | 57 | 53 | 51 | 51 |
| 58 | 58 | 58 | 54 | 54 | 53 |
| 59 | 59 | 59 | 55 | 55 | 55 |
| 60 | 60 | 60 | 60 | 58 | 57 |
| 61 | 61 | 61 | 61 | 59 | 59 |
| 62 | 62 | 62 | 62 | 62 | 61 |
| 63 | 63 | 63 | 63 | 63 | 53 |

** La differenza fra due quadrati consecutivi è sempre un numero dispari:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^2$ | $2^2$ | $3^2$ | $4^2$ | $5^2$ | $6^2$ | $7^2$ | $8^2$ | $9^2$ | $10^2$ |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | |

** Giorno della settimana.

(e + s + t + a')/7   il resto fornisce il giorno

| | |
|---|---|
| se | 0 = domenica |
| | 1 = lunedi |
| | 2 = martedi |
| | 3 = mercoledi |
| | 4 = giovedi |
| | 5 = venerdi |
| | 6 = sabato |

| TABELLA I | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | s | | s | a'=a+(a/4) |
| gennaio | 4 | luglio | 3 | |
| febbraio | 0 | agosto | 6 | e= giorno del mese |
| marzo | 0 | settembre | 2 | |
| aprile | 3 | ottobre | 4 | d= parte secolare dell'anno |
| maggio | 5 | novembre | 0 | |
| giugno | 1 | dicembre | 2 | a= anni del secolo |

| TABELLA II | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | calendario giuliano | | | | | | | calendario gregoriano | | | | |
| t | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | t | 3 | 2 | 0 | 5 |
| | | | | | | | | | | | | |
| d | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | d | 15 | 16 | 17 | 18 |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | 19 | 20 | 21 | 22 |
| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | 23 | 24 | 25 | 26 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | | 27 | 28 | 29 | 30 |

Esempio: che giorno era il 12 ottobre 1492 ?

e= 12
s= tabella I per ottobre = 4
d= 14
t= tabella II calendario giuliano = 0
a= 92
a'= 92 + 23 = 115

$(e + s + t + a')/7 = (12 + 4 + 0 + 115)/7 = 131/7 = 18.71 - 18 =$
$= 0.71 \cdot 7 = 5$ ossia un venerdì.

**Nomi citati nel testo**

al-Banna, Ibn (1256-1321)
Archimede di Siracusa (287-212 a.C.)
Briggs, Henry (1561-1631)
Descartes, Réne du Perron [Cartesio] (1596-1650)
Dürer, Albrecht (1471-1528)
Eratostene di Cirene (276-194 a.C.)
Euler, Leonhard [Eulero] (1707-1783)
Fermat, Pierre de (1601-1665)
Fibonacci, Leonardo (circa 1170-1240)
Frénicle de Bessy, Bernard (1605-1675)
Gage, Paul
Germain, Sophie (1776-1831)
Jumeau, André (XVI-XVII secolo)
Lehmer, Derrick Norman (1867-1938)
Leonardo da Vinci (1452-1519)
Lucas, François Anatole Eduard (1842-1891)
Mersenne, Marin (1588-1648)
Napier, John [Nepero] (1550-1617)
Newton, Isaac (1643-1727)
Paganini, Niccolò (1782-1840)
Pascal, Blaise (1623-1662)
Pitagora di Samo (circa 570-496 a.C.)
Platone di Atene (427-347 a.C.)
Recorde, Robert (1510-1558)
Schlegel
Slowinski, David
Tartaglia, Niccolò (1499-1557)

**Bibliografia**


AA.VV., *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Hoepli Milano 1936
BECKMANN P., *A History of π*, St. Martin's Press 1971
BLATNER D., *Le gioie del π*, Garzanti Milano 1999
BORWEIN J.M. - BORWEIN P.B., *Ramanujan e π*, Le Scienze n. 236, 90-98 (Milano, 1988)
BOYER C.B., *Storia della matematica*, Mondadori Milano 1994
CAPELO A.C. - FERRARI M. - PADOVAN G., *Numeri*, Zanichelli Bologna 1990
CRESCI L., *Le curve celebri*, Muzzio Padova 1998
CRESCI L., *I numeri celebri*, Bollati Boringhieri Torino 2000
GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici*, BUR supersaggi Rizzoli Milano 1997
GHERSI I., *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli Milano 1986
MAOR E., *e: The story of a number*, Princeton University Press 1994
MAZZUCATO M.T., *PI greco*, Atti della Fondazione G. Ronchi n. 2, 252-263 (Firenze, 1999)
PICCATO A., *Dizionario dei termini matematici*, Rizzoli Milano 1987
RIVELLI A., *Stereometria applicata* Cisalpino-Goliardica MI 1897
SINGH S., *L'ultimo teorema di Fermat*, Rizzoli Milano 1997
SNIJDERS C.J., *La sezione aurea*, Muzzio Padova 1993
WELLS D., *Numeri memorabili*, Zanichelli Bologna 1991