L'EQUAZIONE DI KORTEWEG-DE VRIES

CENNI STORICI

di Ivana Luca

Molte pubblicazioni scientifiche di ricerca e di rassegna sull'equazione di Korteweg-De Vries iniziano la loro trattazione citando la "Relazione sulle Onde" del 1844 di J. Scott-Russell, dove viene descritto il suo famoso "inseguimento" a cavallo, per osservare l'evoluzione di un'onda in un canale.

Riportiamo qui le accese parole di Scott-Russell:

"*Stavo osservando il moto di una barca trainata da una coppia di cavalli lungo uno stretto canale, quando improvvisamente la barca si fermò, ma la massa d'acqua che essa aveva messo in moto continuò a muoversi, accumulandosi intorno alla prua del vascello, in modo turbolento.*

Improvvisamente, dalla prua, si generò una massa d'acqua che cominciò a muoversi in avanti con gran velocità, assumendo la forma di una larga **onda solitaria**, *lunga circa trenta piedi e alta circa un piede e mezzo.*

Quest'onda d'acqua dalla superficie arrotondata, liscia e ben definita continuò il suo percorso lungo il canale, apparentemente senza mutare forma o velocità.

Io seguivo l'onda a cavallo, la raggiunsi e sorpassai, nonostante la sua velocità di circa otto o nove miglia orarie. La sua altezza gradualmente andava diminuendo e, dopo un inseguimento di circa uno o due miglia, la persi nei *meandri del canale. Questa, nel mese d'Agosto del 1834, fu il mio primo incontro con quel singolare e bellissimo fenomeno..."*

In una pubblicazione di Korteweg-De Vries del 1895 fu proposto un modello matematico dell'equazione, con l'intento di fornire, fra le altre cose, una spiegazione del fenomeno osservato da Scott-Russell.

La forma originale dell'equazione era la seguente

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) \tag{1.1}$$

dove x è la variabile usata per individuare un punto lungo il canale, supposto unidimensionale, t è il tempo, $\eta(x,t)$ è l'altezza della superficie dell'acqua rispetto allo stato di equilibrio l, g la costante gravitazionale, α una costante legata al moto uniforme del liquido e σ una costante definita dalla legge

$$\sigma = \frac{1}{3}l^3 - \frac{Tl}{\rho g}$$

essendo T la tensione di capillarità della superficie e ρ la densità dell'acqua. L'equazione (1.1) è ora conosciuta come l'equazione di Korteweg-De Vries, o semplicemente, per abbreviare, l'equazione di KdV.

Per circa sessantacinque anni l'equazione di KdV interessò poco la comunità scientifica e fu menzionata solo occasionalmente nella letteratura e talvolta anche dimenticata, com'è stato evidenziato in una pubblicazione del 1978, di carattere storico e bibliografico, da Van der Blij.

Nel 1960 Gardner e Morikawa riscoprirono l'equazione come modello per l'analisi di onde idromagnetiche in un plasma, dove veniva trascurato l'effetto delle collisioni fra particelle. Da allora l'equazione di KdV è stata utilizzata spesso come un modello di equazione capace di descrivere una considerevole varietà di fenomeni fisici (Miura, 1976).

Oggi l'equazione di KdV può essere considerata una delle equazioni fondamentali della fisica matematica ed ugualmente importante è lo sviluppo dei nuovi metodi matematici e dei risultati che traggono origine da essa. Tale equazione, originata dalla modellizzazione di reali fenomeni di propagazione ondosa, spesso ha richiesto lo studio e l'analisi di problemi prettamente teorici di geometria algebrica.

E' naturale chiedersi chi diede il nome a questa celebre equazione e chi, a vario titolo, ha collaborato al suo successo.

Molte risposte sono date da Van der Blij in una pubblicazione del 1978. Diederik Johannes Korteweg, nato il 31 Marzo del 1848 e morto il 05 ottobre del 1941, era un famoso professore olandese di matematica presso l'università di Amsterdam, autore anche di numerosi articoli scientifici.

Gustav de Vries scrisse la sua tesi di dottorato sotto la direzione di Korteweg e la presentò, all'Università d'Amsterdam, il primo Dicembre del 1894.

La tesi era scritta in lingua olandese e dava rilievo ad un'equazione adesso conosciuta come l'equazione di KdV. Gustav de Vries dedicò molta della sua attività professionale come insegnante di scuola secondaria.

La fama e la popolarità dell'equazione di KdV non sono solo legate al modello della propagazione di onde anomale in un canale.

Infatti, molti altri fenomeni sono stati studiati mediante equazioni che, in pratica, sono equivalenti all'equazione di KdV.

Riguardo alla descrizione del fenomeno dell'onda in un canale, sono stati proposti modelli più accurati dell'equazione di KdV.

Ad esempio Benjamin, Bona & Mahony nel 1972 hanno formulato un modello alternativo. Una completa trattazione di modelli alternativi è stata data da Kruskal nel 1975.

BIBLIOGRAFIA

- A. Cohen, Existence and regularity for solutions of the Korteweg-de Vries equation. Arch. Rat. Mech. Anal. 71, number 2. pp. 143-175 (1979).

- C. S. Gardner & G. K. MoriKawa, Similarity in the asymptotic behaviour of collision-free hydromagnetic waves and water waves. Courant Institute of Math. Sciences Report (1960).

- C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Method for solving the Korteweg–de Vries equation. Phys. Rev. Lett. 19. pp. 1095-1097 (1967).

- C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Korteweg–de Vries Equation and generalizations VI. Comm. Pure Appl. Math. 27, pp. 97-133 (1974).

- D. J. Korteweg & G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Philosoph. Magazine Vol. XXXIX, pp. 422-443 (1895).

- E. Hopf, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math. 3. pp. 201-230 (1950).

- F. Van der Blij, Some details of the history of the Korteweg-de Vries equation. Nieuw Archief voor Wiskunde XXVI, No. 1 pp. 54-64 (1978).

- G. B: Whitham, Linear and nonliner waves. John Wiley (1974).

- J. D. Cole, On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. Appl. Math. 9, pp. 225-236 (1951).

- J. L. Bona 6 R. Smith. The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. Phil. Trns. Roy. Soc. London Ser. A. 278 pp. 555-604 (1975).

- J. Scott-Russell, Report on waves. Proc. Royal Soc. Edinburgh (1844).

- M. Kruskal, Nonlinear wave equations. In: Dynamical Systems and Applications, J. Moser Ed. Springer Lecture Notes in Phisics 38, pp. 310-354 (1975).

- M. Wadati and M. Toda, The exact N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation. J. Phys. Soc. Jap. 32, pp. 1403-1411 (1972).

- N. J. Zabusky, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction. Proc. Symp. On Nonlin. Part. Diff. Eqs W. F. Ames, ed. Academic Press, pp. 223-258 (1967).

- N. J. Zabusky & M. D. Kruskal, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett. 15. pp. 240-243 (1965).

- P. Deift & E. Trubowitz, Inverse scattering on the line. Comm. Pure and Appl. Math. XXXII, pp. 121-251 (1979).

- P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math. 21, pp. 467-490 (1968).

- P. M. Morse & H. Feshbach, Methods of theoretical physics McGraw-Hill (1953).

- R. M. Miura, Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. J. Math. Phys. 9, pp. 1202-1204 (1968).

- R. M. Miura, The Korteweg-de Vries equation: A survey of results. SIM Review 18. No. 3. pp. 412-459.

- S. Tanaka, Korteweg-de Vries equation. Construction of solitons in terms of scattering data. Osaka J. Math. 11. pp. 49-59 (1974).

- S. Tanaka, On the N-tuple wave solutions of the Korteweg-de Vries equation. Publ. Res. Inst. Mth. Sci. Kyoto Univ. 8, pp. 419-429 (1972).

- T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 272, pp. 47-48 (1972).

- V. E. Zakharov, Kinetic equation for solitons. Soviet Phys. JETP 33, pp. 533-541 (1971).