Intervento al 3° convegno nazionale *ADT*
"Matematica, Formazione Scientifica e nuove tecnologie" (Ferrandina, dicembre '04)

Una semplice dimostrazione del teorema di Pick

di Domenico Lenzi [1]

Introduzione. Mauro Cerasoli, in un conferenza intitolata "Alcuni teoremi spettacolari da portare in classe" (convegno Matematica senza Frontiere, Lecce, 2003) illustrò, tra l'altro, la cosiddetta *formula di Pick*. Questa, come è noto, fornisce in un modo sorprendente l'area di un poligono avente come frontiera una poligonale semplice e chiusa i cui vertici corrispondono ai punti d'incontro (*nodi*) di rette di un piano che determinano una quadrettatura (vedere figg. 1 e 2). Noi cercheremo di trasformare la sorpresa legata a questa formula in qualcosa di intuitivamente convincente, a cui faremo seguire – senza pretese di originalità – alcune considerazioni di tipo più rigoroso. In letteratura ci sono numerosi articoli sull'argomento, alcuni dei quali vengono citati in Bibliografia. Qui per lo sviluppo del paragrafo 2 e per le figure numerate ci siamo riferiti a un articolo di Gianfranco Bo (si veda [3]).

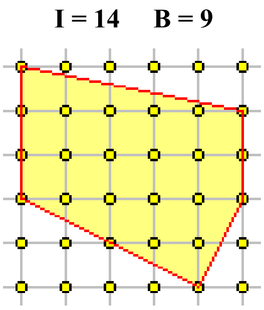

Fig. 1

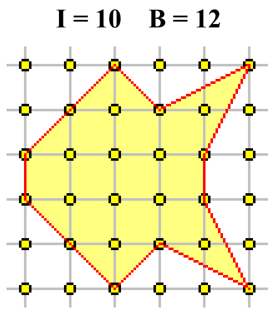

fig. 2

1. Considerazioni generali. A pag. 84 degli atti del convegno leccese M. Cerasoli scrive (vedere figg. 1 e 2): «Consideriamo il quaderno a quadretti, ovvero quello che le maestre chiamano il geopiano. In altri termini, consideriamo i nodi del quaderno, cioè le intersezioni delle rette. Fissati alcuni nodi, possiamo considerare il poligono racchiuso da essi […] La formula di Pick ci dà l'area di un tale poligono quando l'unità di misura è la distanza tra le rette […] Basta conoscere: **1.** il numero **I** di nodi interni al poligono; **2.** il numero **B** di nodi che si trovano sui lati che formano il poligono. Allora l'area del poligono vale **I – 1 + B/2**. Sarebbe il caso di conoscere una dimostrazione elementare di questo teorema». Sin qui le parole di M. Cerasoli. Noi, raccogliendo il suo invito, cercheremo di presentare qualche prova semplice e convincente del teorema di Pick. Comunque facciamo presente

[1] Domenico.lenzi@unile.it; Dipartimento di Matematica dell'Università, 73100 Lecce.

che in [2] è anche riportata un'esperienza svolta nella quarta classe di un liceo scientifico, dove – nel corso di mezz'ora – 4 studenti su 24 sono riusciti a ricavare la formula di Pick osservando alcuni casi particolari.
Per facilitare alcuni conteggi noi preferiamo scrivere la formula precedente nel seguente modo:

$$(1) \qquad \mathbf{I + (B\text{-}2)/2}.$$

Grazie al secondo addendo della (1), in alcuni casi noi trascureremo di proposito due nodi opportunamente scelti sul bordo del poligono, e conteremo i rimanenti.
Intanto ricordiamo che si chiama *poligonale semplice* una sequenza $\boldsymbol{p}$ di segmenti consecutivi $\mathbf{s}_1\dots\ \mathbf{s}_n$ che non si "intrecciano". In termini meno disinvolti ciò significa che i segmenti dati si incontrano esclusivamente negli estremi, ma in modo tale che ogni segmento $\mathbf{s}_i$ distinto da $\mathbf{s}_1$ e da $\mathbf{s}_n$ abbia in comune ciascuno dei suoi due estremi rispettivamente col segmento $\mathbf{s}_{i-1}$ che lo precede e col segmento $\mathbf{s}_{i+1}$ che lo segue; con l'ulteriore possibilità che il primo e l'ultimo segmento $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_n$ abbiano in comune l'estremo residuo, nel qual caso la poligonale si dice *chiusa*. Se $\boldsymbol{p}$ non è chiusa, allora gli estremi "liberi" di $\mathbf{s}_1$ e di $\mathbf{s}_n$ sono detti estremi di $\boldsymbol{p}$.
Una poligonale semplice e chiusa situata su di un piano ne delimita una parte che viene chiamata *poligono semplice*. Ciò è facile da accettare da un punto di vista intuitivo e non presenta grandi difficoltà dimostrative [2] (si veda [16], pag. 494 e segg.).
Avendo chiamato poligoni (quadrati, rettangoli...) di Pick i poligoni di cui parliamo si può notare che – a prescindere dal fatto che il teorema di Pick sia vero oppure no – la formula (1) *a priori* rappresenta un modo per attribuire una particolare *valutazione* $v(\boldsymbol{P})$ all'area di un poligono di Pick $\boldsymbol{P}$. Perciò, avendo indicato con $a(\boldsymbol{P})$ l'area effettiva di $\boldsymbol{P}$, si tratta di provare che $a(\boldsymbol{P}) = v(\boldsymbol{P})$.
Noi arriveremo alla dimostrazione dopo aver svolto le seguenti tre fasi preliminari: **1)** Proveremo che la valutazione v gode di particolari proprietà additive e sottrattive; **2)** verificheremo il teorema di Pick per rettangoli che abbiano due lati orizzontali e due verticali; **3)** estenderemo il teorema di Pick ai triangoli.

2. Le fasi preliminari. Proviamo quanto preannunciato alla fine del paragrafo precedente.
1) Supponendo di avere un poligono di Pick $\boldsymbol{P}_0$ che risulti dall'"accostamento" (unione) di due altri poligoni di Pick $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$ che abbiano in comune una poligonale semplice e non chiusa $\boldsymbol{q}$ (si veda fig. 3), verifichiamo la seguente eguaglianza:

$$(2) \qquad v(\boldsymbol{P}_0) = v(\boldsymbol{P}_1) + v(\boldsymbol{P}_2).$$

[2] Ben più difficile – però da un punto di vista dimostrativo (si veda [4]) – è il caso in cui invece di una poligonale semplice e chiusa si abbia una curva chiusa ottenuta "deformando" una circonferenza; cioè, una curva che sia omeomorfa a una circonferenza rispetto alla topologia che deriva loro dal piano in cui giacciono (teorema di separazione di Jordan).

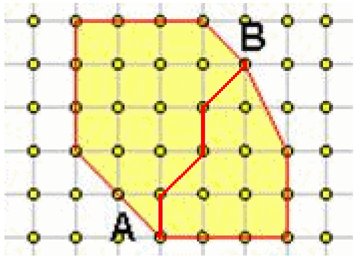

fig. 3

Noi per i conteggi relativi alla (2) conveniamo di escludere i due estremi **A** e **B** di $\boldsymbol{q}$ posti sul bordo di ciascuno dei poligoni $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$.
Orbene, i nodi residui situati sul bordo di $\boldsymbol{P}_0$ si distribuiscono in parte sul bordo di $\boldsymbol{P}_1$ e in parte sul bordo di $\boldsymbol{P}_2$ (senza che ci sia intersezione), perciò ciascuno di essi dà lo stesso contributo di 1/2 sia a $v(\boldsymbol{P}_0)$ che a $v(\boldsymbol{P}_1) + v(\boldsymbol{P}_2)$.
Invece i nodi interni a $\boldsymbol{P}_0$ si distribuiscono (senza che ci sia intersezione) in parte sulla poligonale di confine $\boldsymbol{q}$ e in parte all'interno di $\boldsymbol{P}_1$ o di $\boldsymbol{P}_2$. Nel primo caso questi nodi danno contributo 1 a $v(\boldsymbol{P}_0)$, mentre danno lo stesso contributo 1/2 sia a $v(\boldsymbol{P}_1)$ che a $v(\boldsymbol{P}_2)$; nel secondo caso essi danno contributo 1 a $v(\boldsymbol{P}_0)$ e a uno soltanto dei valori $v(\boldsymbol{P}_1)$, $v(\boldsymbol{P}_2)$. Non essendoci altri nodi in gioco, l'uguaglianza (2) è verificata.

Osservazione 1. Poiché, ovviamente, $a(\boldsymbol{P}_0) = a(\boldsymbol{P}_1) + a(\boldsymbol{P}_2)$, se per due dei precedenti poligoni $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ risulta $a(\boldsymbol{P}_\mathrm{i}) = v(\boldsymbol{P}_\mathrm{i})$, allora – grazie alla (2) – la stessa eguaglianza deve valere anche per il terzo poligono. Da ciò per v conseguono due ovvie proprietà di tipo additivo e di tipo sottrattivo, che si estendono induttivamente anche al caso di più di due poligoni di Pick opportunamente "accostati".

2) Verifichiamo il teorema di Pick per rettangoli che abbiano due lati "orizzontali" (e due "verticali"), che chiamiamo *rettangoli standard*.
Per un "quadretto" $\boldsymbol{Q}$ del reticolato il teorema è banalmente vero. Infatti $a(\boldsymbol{Q})=1$, inoltre $\boldsymbol{Q}$ ha quattro nodi sul bordo e nessun nodo interno, onde $v(\boldsymbol{Q}) = 0+(4\text{-}2)/2 = 1 = a(\boldsymbol{Q})$. Di conseguenza il teorema vale anche per un qualsiasi rettangolo standard $\boldsymbol{R}$, dal momento che $\boldsymbol{R}$ si ripartisce in quadretti (si veda fig. 4) in modo tale da poter applicare la precedente proprietà additiva.
In maniera alternativa a quella presentata or ora, si può procedere a un conteggio del numero dei quadretti che compongono $\boldsymbol{R}$, poiché l'area di $\boldsymbol{R}$ è data proprio da quel numero. A tal fine conviene contare il numero dei nodi superiori destri di tali quadretti, dato che essi sono tanti quanti i quadretti in questione.

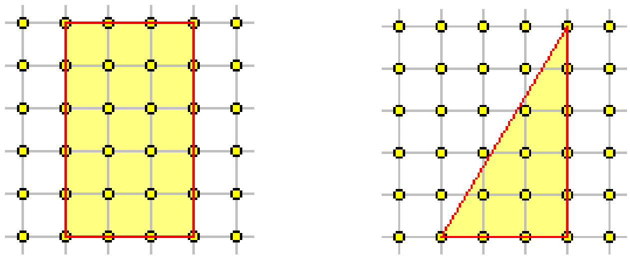

fig. 4 fig. 5

Naturalmente, agli effetti del conteggio, consideriamo il numero **I** di tutti i nodi interni, poiché a ognuno di questi corrisponde uno dei nostri quadretti. Poi valutiamo il contributo dei **B** nodi situati sul bordo del rettangolo. E' chiaro, però, che dobbiamo escludere sia il nodo di ***R*** situato in alto a sinistra, sia quello situato in basso a destra, dato che essi non rientrano tra quelli da conteggiare.
Dei nodi residui del bordo sono da conteggiare soltanto quelli posti sulla parte superiore e quelli posti sulla destra, che sono la metà esatta dei nodi rimasti; perciò il contributo dei nodi del bordo è pari a **(B-2)/2**. Quindi il numero totale dei nodi che danno l'area di ***R*** è proprio **I + (B-2)/2**.

3) Ora estendiamo il teorema di Pick a un triangolo rettangolo ***T*** che abbia un cateto orizzontale e uno verticale, che chiamiamo *triangolo standard*. Ebbene ***T*** è la "metà" di un rettangolo standard ***R*** ottenuto accostando ad esso lungo la sua ipotenusa un ugual triangolo standard ***T'*** (si vedano fig. 4 e 5), perciò $v(\boldsymbol{T}) = v(\boldsymbol{T'})$. Allora per quanto già osservato risulta $a(\boldsymbol{R}) = v(\boldsymbol{R}) = v(\boldsymbol{T}) + v(\boldsymbol{T'}) = 2v(\boldsymbol{T})$, onde $a(\boldsymbol{T}) = a(\boldsymbol{R})/2 = v(\boldsymbol{T})$.

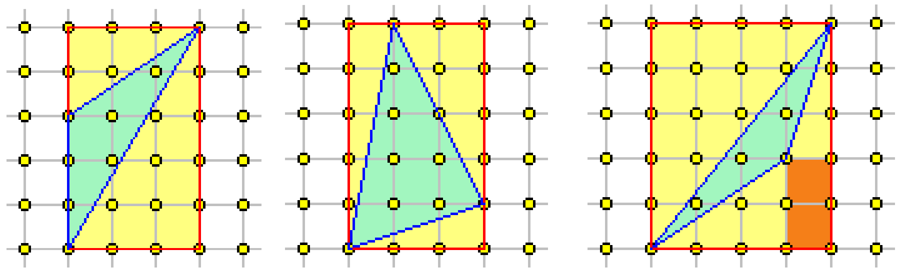

fig. 6 fig. 7 fig. 8

Invece per un triangolo di Pick che abbia un solo lato verticale (si veda fig. 6) oppure orizzontale, il teorema si prova applicando la proprietà sottrattiva due volte rispetto a un rettangolo standard. Ci si rende conto facilmente che il caso più generale si riconduce alle due eventualità illustrate in fig. 7 e in fig. 8, per le quali la proprietà sottrattiva si applica rispettivamente tre volte o quattro volte.

3. Una dimostrazione semplice. Grazie ai risultati sin qui ottenuti è chiaro che per un poligono di Pick ***P*** convesso [3] (cioè, il cui bordo non presenti “insenature”) il teorema di Pick è vero. Infatti, se esso non è un triangolo, allora lo si può scomporre nei triangoli che si ottengono fissando un suo vertice **A** e considerando i segmenti che congiungono **A** con tutti i vertici che non sono consecutivi ad esso (si veda la successiva fig. 9). Dopodiché si può applicare la proprietà additiva.

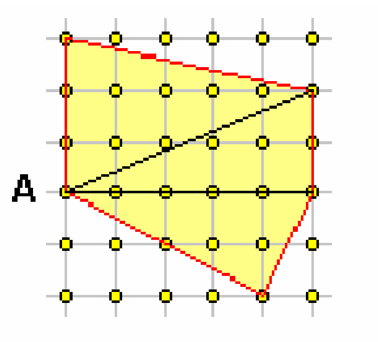

fig. 9

Il ragionamento condotto fin qui è stato impostato in modo da poterlo facilmente rigorizzare. Invece il caso di un poligono non convesso (vedere fig. 2 e fig. a), molto semplice sul piano intuitivo, si può affrontare raccogliendo il suggerimento dato in [10] (ivi illustrato con l’ausilio di fig. a) dove si può leggere: [...] *Première phase: On découpe le polygone en polygones convexes. Deuxième phase: On découpe chaque polygone convexe en triangles, en tracant toutes les diagonales partant d'un même sommet.*

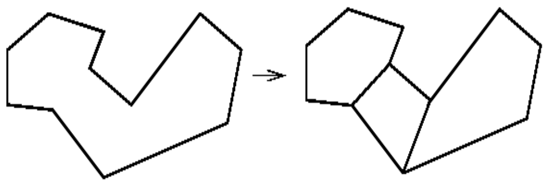

fig. a

Tuttavia è proprio la decomposizione illustrata in figura che – nonostante sia intuitivamente facile da accettare – nel caso generale presenta qualche difficoltà nell’organizzazione di una dimostrazione rigorosa. Ciò che bisognerebbe fare è provare che anche un poligono semplice e non convesso ***P*** ha almeno una *diagonale* (o *corda*) da cui si può far partire la decomposizione; cioè, all’interno di ***P*** si può condurre un segmento che congiunga due vertici della poligonale semplice ***p*** che

[3] ***P*** si dice convesso quando la retta **r** passante per un suo lato qualsiasi lascia tutto ***P*** in uno stesso semipiano delimitato da **r**. Più in generale, una figura geometrica ***F*** si dice convessa quando il segmento che congiunge due suoi punti arbitrari giace su ***F***. Perciò quando ***F*** non è convessa, allora essa appare con delle “insenature”. Per i poligoni le due definizioni sono equivalenti.

delimita $\boldsymbol{P}$, senza incontrare $\boldsymbol{p}$ in altri punti. La dimostrazione richiesta non è facile da impostare, anche se *a posteriori* ci si rende conto della sua relativa semplicità. Noi ce ne occuperemo nel prossimo paragrafo.
Un altro modo per dare un'idea convincente sul piano intuitivo del fatto che il teorema di Pick sia vero anche nel caso di un poligono non convesso $\boldsymbol{P}_1$ di n lati, delimitato da una certa poligonale semplice e chiusa $\boldsymbol{p}_1$, consiste nel considerare un segmento minimale AB che si "appoggi" a $\boldsymbol{P}_1$ dall'esterno in modo da "otturarne" un'insenatura, ma senza penetrarlo; onde i punti A e B coincidono con due vertici non consecutivi di $\boldsymbol{p}$. Così si ottiene un poligono semplice $\boldsymbol{P}_0$ avente meno di n lati, delimitato da AB e dalla nuova poligonale $\boldsymbol{p}_0$ costituita dalla parte di $\boldsymbol{p}_1$ situata al di fuori dell'insenatura. Allora è chiaro che $\boldsymbol{P}_1$ si ottiene sottraendo a $\boldsymbol{P}_0$ un poligono semplice $\boldsymbol{P}_2$ avente un numero di lati inferiore a n, lati che sono dati da AB e dai lati dell'insenatura che AB ha otturato. Perciò $\boldsymbol{P}_0$ è ottenuto dall'accostamento – nel senso della fase preliminare **1)** – dei due poligoni $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$, poiché essi hanno in comune la poligonale semplice che determina l'insenatura "colmata". Onde $\nu(\boldsymbol{P}_1) = \nu(\boldsymbol{P}_0) - \nu(\boldsymbol{P}_2)$. Quindi se – per assurdo – il teorema di Pick non fosse vero per qualche poligono semplice, allora potremmo scegliere $\boldsymbol{P}_1$ in modo tale che esso abbia il numero minimo di lati tra i poligoni semplici per i quali il teorema è falso; perciò per $\boldsymbol{P}_0$ e $\boldsymbol{P}_2$ il teorema risulta vero. Allora $\nu(\boldsymbol{P}_1) = \nu(\boldsymbol{P}_0) - \nu(\boldsymbol{P}_2) = a(\boldsymbol{P}_0) - a(\boldsymbol{P}_2) = a(\boldsymbol{P}_1)$, il che è assurdo.
Alcuni autori svolgono una dimostrazione in cui si prova che un qualsiasi poligono si può scomporre in triangoli *elementari* – cioè triangoli che non hanno nodi interni e hanno soltanto tre nodi sul bordo (i vertici) [4] – in modo tale da poter applicare la proprietà di additività. Però una dimostrazione diretta di ciò presenta qualche difficoltà. Invece essa è un facile corollario del teorema di esistenza di una decomposizione di un poligono che non sia triangolo in poligoni convessi, dato che questi a loro volta si possono facilmente scomporre in triangoli elementari.
Il teorema di Pick è stato esteso sia al caso in cui la poligonale che lo delimita sia intrecciata sia a quello in cui il poligono abbia dei "buchi", cioè abbia un bordo costituito da m poligonali chiuse, delle quali m-1 sono "interne" (si veda [17]). Il teorema è stato anche esteso al caso dei poliedri (vedere [9], [12] e [13]).

4. Un po' più di rigore. Dal punto di vista del rigore anche la dimostrazione del teorema di Pick data alla fine del paragrafo precedente presenta un piccolo neo dovuto alla considerazione di quel segmento AA° che "ottura una insenatura" del poligono $\boldsymbol{P}$. Il discorso si può condurre in termini più rigorosi considerando il poligono $\boldsymbol{P}^*$ che esprime la più piccola figura convessa che contiene $\boldsymbol{P}$ (cioè [5], la

[4] Quindi l'area di un qualsiasi triangolo elementare è 0+(3-2)/2 = 1/2. Di conseguenza 1/2 rappresenta l'area minima che i poligoni di Pick possono avere.
[5] Da un punto di vista intuitivo, $\boldsymbol{P}^*$ è il più piccolo poligono convesso che "ottura" tutte le insenature di $\boldsymbol{P}$.

cosiddetta *chiusura convessa* di ***P***). Allora il segmento AA° è precisamente uno dei lati di ***P**** che non sia anche un lato di ***P***. Tuttavia, al fine di ovviare a perplessità dovute a una poca padronanza del concetto di chiusura convessa, ora daremo una dimostrazione del fatto che ogni poligono di Pick che non sia un triangolo possiede una diagonale interna (da cui per decomposizioni successive scaturisce immediatamente il teorema di Pick).
Per la dimostrazione ci rifaremo a quella riportata in [16] (pagg. 499 e 450), attenuandone il ricorso ad aspetti intuitivi che non siano immediatamente rigorizzabili. Il discorso – che riferiremo tacitamente a poligoni che non siano triangoli – sarà condotto in modo da poterlo estendere facilmente a un qualsiasi poligono semplice del piano.
In un poligono ***P*** di quel tipo consideriamo la retta passante per uno dei suoi punti A situati più in alto. Quindi, dati i vertici B e C adiacenti ad A lungo la poligonale ***p*** che delimita ***P***, consideriamo il triangolo ABC.

Osservazione 2. Se su ABC c'è un punto M della poligonale ***p*** diverso da quelli dei due segmenti AB e AC, allora su ABC ci deve essere un vertice di ***p*** diverso dai punti A, B, C. Infatti, considerato il lato LN di ***p*** su cui si trova M, uno dei vertici L, N deve stare tra i punti di LN che giacciono sul semipiano individuato dalla retta BC e dal punto A. Orbene, poiché ***p*** è semplice, allora quel vertice non può trovarsi "al di là" dei lati AB e AC. Il che assicura la tesi. ■

Teorema 3. Se su ABC non ci sono vertici della poligonale ***p*** diversi da A, B e C, allora BC è una diagonale interna a ***P***.

Dimostrazione. Proviamo che ogni punto F interno a BC è interno anche a ***P***. Ebbene come conseguenza immediata dell'Osservazione 2, sul segmento FA non ci sono punti di ***p*** diversi da A. Quindi se prolunghiamo FA dalla parte di A fino a un punto arbitrario F', allora FF' è attraversato da ***p*** soltanto in A. Perciò, dato che F' è esterno a ***P***, F deve esseregli interno. ■

Osservazione 4. Sia dato un segmento AD giacente sul triangolo ABC. Se LM è un lato di ***p*** avente in comune con AD un punto P distinto da A e da D, allora uno degli estremi L, M è situato su ABC e ha dalla retta BC una distanza maggiore di quella di D [6]. Perciò quell'estremo deve stare sul triangolo ABC, poichè AB e AC rappresentano una "barriera" per LM, dato che ***p*** è semplice. ■

Ora per verificare che un poligono del nostro tipo ha una diagonale interna ci resta da esaminare il caso in cui sul triangolo ABC ci siano vertici di ***p*** diversi da A, B e C (si veda fig. 10).

[6] Infatti ciò vale per P rispetto a D, inoltre uno dei due punti L, M ha una distanza dalla retta BC maggiore o eguale – dalla parte di A – rispetto a P.

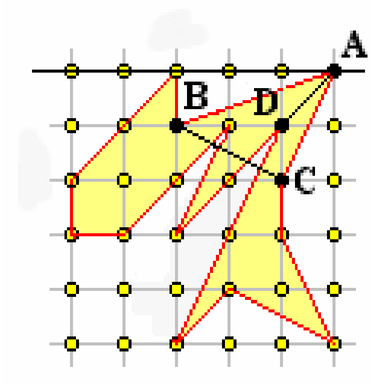

fig. 10

Teorema 5. Se sul triangolo BAC ci sono vertici di ***p*** distinti da A, B e C, allora in BAC c'è un vertice D di ***p*** tale che AD sia una diagonale interna a ***P***.

Dimostrazione. Sia D uno dei vertici di ***p*** distinti da A, B e C, che in ABC hanno distanza massima dalla retta BC. Ebbene AD è la diagonale cercata. Infatti, per come è stato scelto D e per l'Osservazione 4, nessun lato LM di ***p*** diverso da AB e da AC può avere in comune con AD un punto distinto da D e da A.
Ora se F è un qualsiasi punto interno ad AD, esso è interno anche a ***P*** per una considerazione analoga a quella svolta per il punto F di cui alla dimostrazione del Teorema 3. Ciò assicura la tesi. ■

Bibliografia

[1] A. Borgomolny *Pick's Theorem* http://www.cut-the-knot.com/ctk/Pick.shtml
[2] G. T. Bagni *Geometria e teoria dei numeri nell'opera di Georg Pick: un'esperienza didattica*, http://www.syllogismos.it/education/Pick.pdf, Boll. Docenti di mat. (1996), 43-52.
[3] G. Bo *Il teorema di Pick*, http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/pickteor.htm.
[4] G. De Cecco *Il teorema di separazione di Jordan*, Archimede, 4 (1976).
[5] H. S. M. Coxeter *Introduction to GEOMETRY*, J. Wiley & Sons, N. York (1969).
[6] E. Fithian *The geoboard* http://homepage.mac.com/efithian/Geometry/Activity-03.html.
[7] W. W. Funkenbusch *From Euler's Formula to Pick's Formula using an Edge Theorem* *The American Mathematical Monthly* Volume 81 (1974) pages 647-648.
[8] B. Grünbaum, G. C. Shephard,- Pick's theorem, The Am. Math. Montly 100 (1993) 150-161.
[9] I. G. MacDonald *The volume of a lattice polyedron*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59 (1963) 719-726.

[10] M. El Machkouri, P. Lepelletier et G. Maillard, *Le théorème de Pick*, http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Pick/Pick.html
[11] G. A. Pick,- *Geometrisches zur Zahlentheorie*, Sitzungber. Lotos, Naturtur-wissen Zeitschrift, 19 (1899) 311-319.
[12] J. E. Reeve,- *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957) 378-395.
[13] J. E. Reeve,- *A further note on the volume of lattice polyhedra*, J. London Math. Soc. 34 (1959) 57-62.
[14] T. Scavo *Geoboards in the classroom* http://mathforum.org/trscavo/geoboards/intro3.html.
[15] S. Serre Teorema di Pick http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Ott_03
[16] G. Scorza Dragoni *Elementi di Analisi Matematica*, Padova, Cedam (1963).
[17] D. E. Varberg *Pick's theorem revisited*, Am. Math. Month. 92 (1985), 584-587.