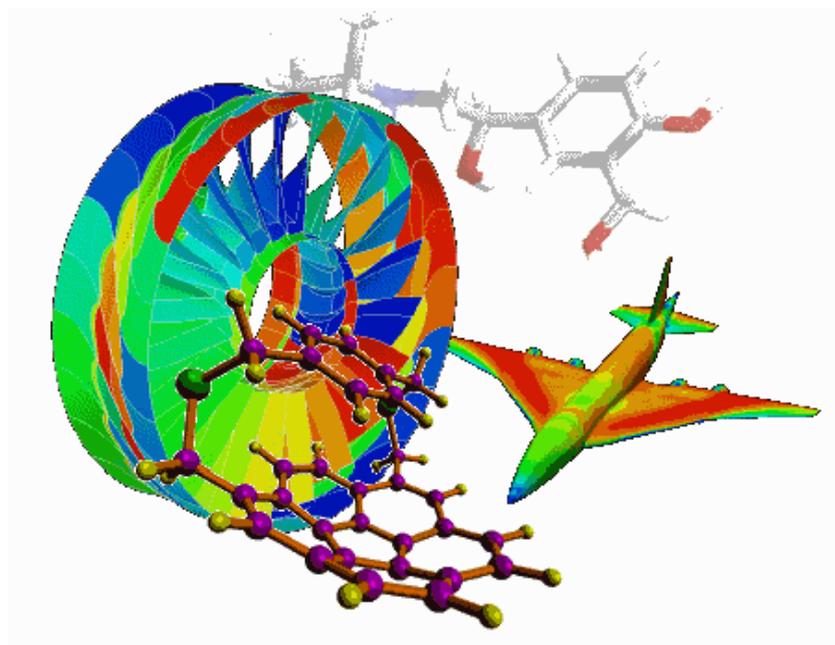


# Gabriele Martufi

## Il Crollo del Ponte Sospeso Tacoma Narrows nel 1940



## La Modellistica Fisico-Matematica, le Simulazioni Numeriche e il Calcolo Scientifico



## Il Crollo del Ponte Sospeso Tacoma Narrows nel 1940

( articolo tecnico/divulgativo a cura di Gabriele Martufi <http://gabrielemartufi.altervista.org/> )

### Introduzione

La mattina del 7 novembre 1940 il Tacoma Narrows Bridge crollò "abbattuto" dal vento sostenuto che soffiava attraverso Puget Sound ad una cinquantina di chilometri a sud di Seattle negli Stati Uniti, era aperto da soli quattro mesi, il disastro fu documentato da fotografie (vedi di seguito) e video (vedi sul sito <http://gabrielemartufi.altervista.org/>) di grande impatto drammatico riprese da **Burt Farquharson** un docente di ingegneria civile che studiava i movimenti del ponte. All'inaugurazione il ponte ondulava già tanto ma senza conseguenze fatali si riteneva che gli amanti del brivido lo cercassero per provare l'esperienza di una attraversata da ottovolante, altri deviavano di diversi chilometri dal percorso prestabilito per evitare il "galloping gertie" ovvero il "dinosauro a galoppo". In seguito si era cercato di ovviare con smorzatori che contrastassero lo sviluppo delle oscillazioni ma evidentemente con scarsi risultati. All'epoca nessuno si preoccupò di studiare in modo approfondito le interazioni delle forze aerodinamiche sul ponte, tanto disastrose in passato per ponti sospesi flessibili assai più leggeri e corti, semplicemente si riteneva che tali azioni non avrebbero intaccato una struttura di dimensioni imponenti come il Tacoma Narrows Bridge (campata centrale: 853 metri) il terzo ponte sospeso più lungo al mondo all'epoca. L'unico a dissentire con il progetto fu **Theodore Condron** un ingegnere civile che raccomandò di rinforzare la struttura rimase inascoltato... dopo il crollo la Federal Works Agency stabilì una commissione d'indagine con tecnici quali **Othmar Hermann Ammann** (1879-1965) e **Theodore Von Kármán** (1881-1963) che scagionò il progettista, osservando che, se le pecche del ponte erano ovvie a uno sguardo retrospettivo, il progetto rispondeva a ogni criterio accettabile nella pratica. Il mondo accademico e professionale si macchiò nel suo operato di totale ignoranza e presunzione.

### Le Cause del Crollo: l'Instabilità Aeroelastica

A distruggere il ponte furono le oscillazioni torsionali amplificate ma non dalla risonanza come erroneamente descritto su alcuni testi di fisica (obsoleti) e universalmente accettato, nella realtà si instaurò una oscillazione aeroelastica autoeccitata ovvero si verificò una instabilità aeroelastica. La risonanza è un fenomeno fisico che si manifesta quando la frequenza della forza eccitante è uguale alla frequenza naturale del sistema meccanico oscillante (a rigore un sistema meccanico "reale" ha infinite frequenze proprie...!) in altri termini il fenomeno della risonanza è tale per cui una forza periodica anche debole (detta forzante) può produrre sollecitazioni e vibrazioni notevolissime su un corpo che oscilla con la medesima frequenza della forzante, allo stesso modo in cui imprimendo al momento opportuno una piccola spinta ad un'altalena riusciamo ad aumentarne di molto l'ampiezza delle oscillazioni. Il crollo del ponte avvenne alcune ore dopo che il processo vibrazionale si era instaurato indotto da un vento praticamente costante dell'ordine di 65 Km/h e in assenza di raffiche forti ed improvvise, dunque viene a mancare la periodicità della forza eccitante ovvero viene meno una condizione necessaria per l'instaurarsi della risonanza, d'altronde è inverosimile immaginare le raffiche di vento come una forza perfettamente periodica nel tempo e per lo più con una frequenza esattamente uguale alla (prima...) frequenza propria del ponte! Nel caso in oggetto il vento può essere modellato matematicamente come un fluido avente velocità media costante e con piccole fluttuazioni nel tempo, a causare il crollo del ponte, come dimostrano diversi studi, fu l'instabilità aeroelastica dovuta al fenomeno del "flutter" più precisamente si verificò un "stall flutter" (flutter di stallo) causato dalla separazione della corrente fluida, questo fenomeno è noto anche come "flutter non classico" così detto perché in esso il ruolo della viscosità del fluido (vento) non è trascurabile e inoltre l'accoppiamento dinamico di più gradi di libertà della struttura non è una condizione necessaria al verificarsi dell'instabilità. Questi fenomeni sono ben noti nell'ingegneria aerospaziale e aeronautica ma va precisato che i fenomeni aeroelastici nell'ingegneria civile per quanto concettualmente vicini a quelli dell'ingegneria aerospaziale e aeronautica si differenziano per la diversa scala del fenomeno e per il più complesso campo aerodinamico, infatti basti considerare che la sezione del piano stradale di un ponte è molto diversa da quella di un profilo alare in conseguenza di ciò il flusso contiene ampie zone separate (correnti staccate, turbolente e rotazionali) e pertanto le simulazioni in galleria del vento si rendono necessarie in quanto la modellazione matematica (vedi di seguito) non è attualmente in grado di cogliere tutti gli aspetti del fenomeno. L'instabilità aeroelastica determinò il crollo del ponte Tacoma Narrows: il vento di velocità ragguardevole, i cui effetti statici erano tuttavia ampiamente previsti e tollerabili, ha soffiato per alcune ore, inducendo nella campata centrale oscillazioni torsionali di ampiezza inesorabilmente crescente. La rotazione torsionale dell'impalcato ha raggiunto angoli superiori ai 45° rispetto all'orizzontale, causando a un certo punto la rottura di uno dei cavi di sostegno che modificò istantaneamente la configurazione dinamica della struttura stessa provocandone il collasso (vedi foto di seguito). Uno dei primi studiosi ad interpretare il crollo del Tacoma Narrows Bridge mediante la teoria dell'instabilità aeroelastica fu Theodore Von Kármán (vedi il profilo di seguito).

## I Fenomeni Aerodinamici e Aeroelastici

Prima di introdurre brevemente il fenomeno del flutter e' opportuno distinguere i fenomeni di interazione vento-struttura in fenomeni aerodinamici e fenomeni aeroelastici con riferimento alle proprietà delle forze che risultano agire sulla struttura investita dal vento. Nei fenomeni aerodinamici la risposta della struttura (moto della struttura) pur avendo un ruolo non trascurabile nelle equazioni del moto non altera sostanzialmente la corrente sollecitante (flusso dell'aria) al contrario nei fenomeni aeroelastici il flusso dell'aria risulta completamente modificato dal moto della struttura. Si sottolinea ulteriormente la differenza tra un fenomeno di risonanza ed uno di vibrazione autoeccitata, nel primo caso (risonanza) agisce sul sistema una forzante esterna assolutamente indipendente dal moto del sistema stesso, il quale ha peraltro più frequenze proprie, solo se la pulsante (forzante) ha una frequenza prossima ad una di queste si instaura il fenomeno della risonanza con amplificazione delle oscillazioni, nel caso delle vibrazioni autoeccitate invece, la forzante non e' esterna, ma dipende dal moto del sistema, esattamente come altre forze (elastiche, inerziali, smorzamenti) nonché da alcuni parametri ovvero particolari valori (detti critici) i quali dividono la regione di stabilità, nella quale il moto si smorza, da quella di instabilità in cui il moto si amplifica. Corrispondentemente si parla di oscillazioni "forzate" come risposta alle forze aerodinamiche e di oscillazioni "autoeccitate" in presenza di fenomeni aeroelastici. I problemi aeroelastici nell'ambito dell'ingegneria strutturale si suddividono in due grandi categorie: i problemi di aeroelasticità statica quali la torsional divergence (divergenza torsionale), i fenomeni di inversione per azionamento di un comando (ingegneria aerospaziale) e problemi di aeroelasticità dinamica quali il lock-in (fenomeno della sincronizzazione), vortex shedding (distacco dei vortici di Von Kármán), flutter, buffeting, galloping.

**Nell'ambito dell'ingegneria del vento ovvero nell'ingegneria civile strutturale i fenomeni aeroelastici sono attualmente classificati in quattro categorie:**

Fenomeni di **aeroelasticità dinamica** nell'ingegneria civile strutturale:

- 1 - distacco dei vortici (**vortex shedding**) e fenomeni di sincronizzazione (**lock-in**)
- 2 - le oscillazioni galoppanti (**galloping**)
- 3 - il **flutter** (comprendente anche il **buffeting**)

Fenomeni di **aeroelasticità statica** nell'ingegneria civile strutturale (sono improbabili):

- 4 - la divergenza torsionale (**torsional divergence**)

Spesso e' estremamente arduo, se non impossibile, individuare il limite di separazione tra i fenomeni aerodinamici e aeroelastici (i quali non sono completamente compresi e teorizzati) perché si influenzano a vicenda, il crollo del ponte di Tacoma Narrows ne e' un esempio clamoroso.

## II Fenomeno del Flutter

Il fenomeno del flutter e' una vibrazione aeroelastica autoeccitata che si instaura in una struttura in moto relativo rispetto a un fluido, quando si verificano particolari condizioni. Il flutter può sempre verificarsi in ambito aeronautico, nelle strutture "flessibili" dell'ingegneria civile e nelle applicazioni industriali e meccaniche (sistemi rotanti, rotori di elicotteri, eliche, turbine, palettature di turbomacchine, schiere rotoriche, instabilità d'asse di un condotto percorso da un fluido) e' legato alle variazioni delle forze aerodinamiche conseguenti al diverso orientamento che le parti della struttura, a causa delle loro stesse oscillazioni, assumono rispetto alla direzione del vento-flusso relativo. Va precisato che dal punto di vista aerodinamico vanno distinte due situazioni di flutter: il "flutter classico" e lo "stall flutter" (flutter non classico). Il "flutter classico" (flutter a due gradi di libertà "flesso-torsionali") e' caratterizzato dall'aver un flusso non separato nel retrocorpo, ovvero il flusso segue il contorno del corpo stesso a causa dell'aerodinamicità/forma dei corpi coinvolti dal fenomeno (strutture alari, ponti sospesi con sezioni sufficientemente aerodinamiche, ponti sospesi di ultima generazione a sezione aerodinamica ottimizzata); invece lo "stall flutter" e' caratterizzato dalla separazione del flusso su una parte del corpo (correnti staccate, turbolente e rotazionali) o durante una parte del ciclo di oscillazione, in tale caso il flutter e' ad un solo grado di libertà e si tratta di una instabilità torsionale dovuta alla non linearità della forza di portanza in vicinanza del fenomeno di stallo (perdita di portanza). Premesso ciò, in generale, il fenomeno derivante da una vibrazione aeroelastica autoeccitata e' caratterizzato da una precisa frequenza e può essere di tipo stabile (regione di stabilità) cioè che tende a smorzarsi o di tipo instabile (regione di instabilità, cioè con ampiezze che tendono ad amplificarsi, si parla di: instabilità aeroelastica, instabilità non Euleriana, le oscillazioni autoeccitate divergono => divergenza delle sollecitazioni => collasso strutturale). In generale esistono dei parametri (fondamentale e' la velocità del fluido nel moto relativo della struttura) la cui variazione continua permette di passare dai campi di valori per

cui la risposta decade a quelli per cui essa si amplifica, in corrispondenza dei valori critici la risposta mantiene ampiezza costante nel tempo, indice del fatto che i moti elastici della struttura generano esattamente le forze aerodinamiche necessarie a sostenerli. Questa situazione limite costituisce il confine inferiore di tutti i fenomeni di instabilità dinamica compresi entro la generica denominazione di flutter, a rigore il termine flutter andrebbe utilizzato per la sola situazione limite, indicando con post-flutter i fenomeni che si svolgono nella regione instabile, e' tuttavia comune utilizzare la dizione flutter nell'accezione più ampia, tenuto anche del fatto che le manifestazioni di flutter sono assai molteplici. Il flutter (nell'accezione più ampia) configura una risposta oscillatoria, che presenta ampiezza, velocità e accelerazione crescenti nel tempo, con un conseguente aumento dell'energia cinetica, tale energia e' fornita dalle forze esterne, se queste sono conservative il loro lavoro viene tuttavia compiuto a spese di un potenziale ed e' limitato e pertanto l'instabilità non si verifica, il flutter può quindi essere indotto solo da forze non conservative (vento, fluido). Una volta innescata una vibrazione autoeccitata, l'energia cinetica della corrente-flusso d'aria che viene ad alimentarla e' in così larga misura superiore all'energia che può essere assorbita dalla struttura da determinarne la rottura, in altri termini l'energia trasferita (estratta) dal fluido alla struttura risulta maggiore di quella dissipata e può condurre quindi al collasso della struttura se le tensioni che si raggiungono superano i valori di resistenza del materiale. La stabilità o meno dell'oscillazione e' dunque normalmente funzione della velocità relativa vento-struttura ed e' quindi possibile definire dei valori critici della velocità, raggiunti i quali il flutter assume estrema pericolosità. E' da tener presente che l'instabilità può verificarsi anche per una velocità critica relativamente bassa se la sezione della struttura e' tale da favorire questo tipo di fenomenologia per esempio anche tramite la formazione e il distacco dei vortici di Von Kármán che innescano-amplificano le oscillazioni. E' possibile prevenire l'instabilità aeroelastica mediante: una elevata rigidità strutturale specie a torsione, posizionando opportunamente l'asse elastico e quello baricentrico nelle varie sezioni della struttura, un rigoroso bilanciamento delle superfici, oltre che con prove sperimentali sulle strutture nella galleria del vento a strato limite sviluppato e con sofisticati calcoli matematici e simulazioni numeriche. (vedi di seguito: **La Modellistica Fisico-Matematica, le Simulazioni Numeriche e il Calcolo Scientifico**)

### **L'Analisi Aeroelastica: il Flutter**

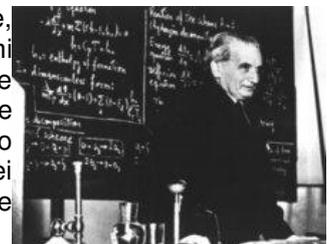
L'analisi aeroelastica si occupa dello studio dei fenomeni derivanti dall'interazione tra le forze elastomeccaniche strutturali e quelle aerodinamiche, trattasi dunque di problemi accoppiati (multifisica, vedi di seguito), classificabili, in generale e a tutto rigore, nell'ambito delle interazioni fluido-struttura (FSI - Fluid-Structure Interaction). Nel caso in oggetto, il ponte sospeso rappresenta un sistema dinamico (sistema aeroelastico) costituito da due sotto-sistemi anch'essi dinamici, quello strutturale e quello aerodinamico, tra di loro strettamente dipendenti (interazione aeroelastica). Ciascun componente rappresenta un sistema a sé, con proprie caratteristiche statiche, dinamiche, propri modelli e tecniche di analisi. Tra le diverse classi di problemi affrontabili, quello più importante, di vitale importanza per i ponti sospesi, è proprio lo studio del flutter. Lo studio "classico" (teoria del potenziale) del flutter valuta la stabilità in piccolo del sistema aeroelastico linearizzato tempo-invariante. La modellazione strutturale si basa sull'assunzione di comportamento elastico lineare con piccole deformazioni e nell'ipotesi che le forze aerodinamiche siano linearizzabili (\*) e sulla rappresentazione modale attraverso un insieme discreto di modi propri tali da permettere di rappresentare correttamente la struttura oggetto di studio. Nel problema classico la dinamica strutturale è rappresentata da matrici (diagonali) generalizzate di massa, rigidità, smorzamento e da un termine aerodinamico. Dunque, l'analisi di flutter, come altri problemi di stabilità, rappresenta dal punto di vista strettamente matematico lo studio degli autovalori e autovettori del sistema. Nel caso del flutter interessa valutare come il sistema strutturale si instabilizzi per effetto dell'interazione con il sistema aerodinamico: la condizione critica è stabilita nel momento in cui un autovalore risulti avere parte reale nulla, con conseguente annullamento dello smorzamento del sistema, spesso la risoluzione del sistema presenta problematiche (a causa del termine aerodinamico) che richiedono lo sviluppo di appositi metodi numerici.

\* L'analisi linearizzata contiene delle ipotesi semplificatrici alla base, specie per il termine aerodinamico, sede di non-linearità, queste sono appunto linearizzate in seguito all'ipotesi di piccoli spostamenti strutturali in modo da arrivare ad un operatore aerodinamico lineare. Tuttavia in alcuni casi di interesse ingegneristico queste assunzioni non sono lecite e il problema si complica notevolmente. In tutti i casi in cui non è lecito eseguire un'analisi linearizzata, i metodi classici basati sulla teoria del potenziale possono fornire dei risultati grossolanamente approssimati, per cui diviene necessario rivolgersi a modelli fluidodinamici più accurati che permettano la risoluzione completa del campo di moto attraverso le equazioni di Eulero o di Navier-Stokes. Il calcolo delle forze aerodinamiche richiede quindi l'impiego di metodologie numeriche appartenenti alla classe della modellistica fisico-matematica e del calcolo scientifico in particolare della fluidodinamica computazionale CFD in combinazione con solutori FEM. Software recenti, sono in grado di risolvere problemi completi di FSI. (vedi di seguito: **La Modellistica Fisico-Matematica, le Simulazioni Numeriche e il Calcolo Scientifico**)

## Le Conclusioni

Nel drammatico crollo non ci furono per fortuna danni a persone o feriti, l'unica "vittima" fu il cane Tubby bloccato nell'auto destinata a precipitare nel fiume. Per i successivi venticinque anni non si costruirono più ponti sospesi "puri" ovvero senza travate di rinforzo irrigidenti. L'effetto che tale crollo ebbe nel mondo accademico e professionale fu enorme, grazie al fatto che l'intero evento fu filmato fin dal suo inizio, l'interpretazione delle cause innescanti il crollo si è arricchita negli anni grazie agli innumerevoli studi svolti. Oggi i fenomeni aerodinamici e aeroelastici sono ben documentati e studiati e nell'ambito dell'ingegneria civile sono attivi corsi universitari quali: dinamica delle strutture, ingegneria del vento, aeroelasticità delle strutture, aerodinamica applicata, discipline che si occupano in modo approfondito dell'interazione vento-struttura. Mediante lo studio di modelli matematici complessi e successive simulazioni nella galleria del vento a strato limite sviluppato e' possibile prevedere con sufficiente approssimazione il comportamento reale della struttura in condizioni estreme. Grazie a questi studi e' stato possibile costruire in sicurezza il ponte sospeso attualmente più lungo al mondo con una campata centrale di circa 1991 metri ovvero il ponte Akashi Kaikyo in Giappone completato nel 1998. Nel 2006 e' previsto l'inizio della costruzione del ponte sullo stretto di Messina con una campata centrale di circa 3300 metri sarà il ponte sospeso più lungo al mondo di dimensioni spaventose al limite delle possibilità ingegneristiche attuali, questo progetto per la sua complessità ha coinvolto migliaia di ingegneri e numerosi centri di ricerca.

**Theodore Von Kármán** (1881-1963) ingegnere e grande teorico Ungherese, studiò in Ungheria, Germania, USA, dedicò la propria vita allo studio dei problemi fluidodinamici dando dei contributi fondamentali, in particolare studiò le scie vorticosi che interessano un corpo investito da un fluido che presero poi il nome dello stesso ingegnere (vortici di Von Kármán, vortex shedding) egli aprì un nuovo capitolo della fluidodinamica ponendo le basi per una corretta interpretazione dei fenomeni aerodinamici e aeroelastici con particolare interesse nel settore aerospaziale e aeronautico.



**foto del ponte Tacoma Narrows: dalla costruzione all'inaugurazione al crollo!**



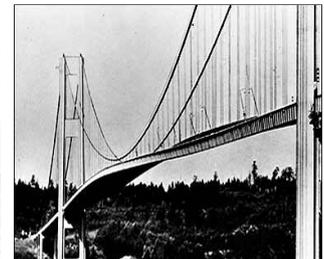
**in costruzione**



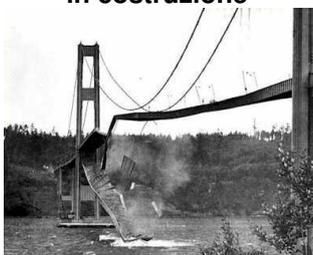
**in costruzione**



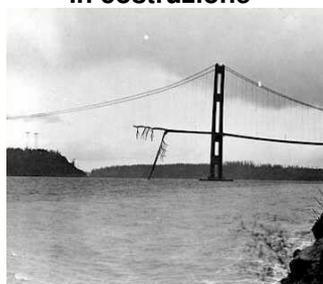
**inaugurazione  
(anno 1940)**



**oscillazioni  
(anno 1940)**



**crollo (anno 1940)**



**veduta laterale**



**meditazione del progettista  
(dopo il crollo)**

**caratteristiche del ponte**  
Progettista: **Leon Moisseiff**

Freccia dei cavi portanti: **70 metri**  
Materiali: **acciaio e calcestruzzo**  
Data del completamento: **1940**  
Campata centrale: **853 metri**  
Data del crollo: **7/11/1940**  
Tipologia: **ponte sospeso**  
Località: **Stati Uniti**

video e aggiornamenti disponibili su: <http://gabrielemartufi.altervista.org/>

# La Modellistica Fisico-Matematica, le Simulazioni Numeriche e il Calcolo Scientifico

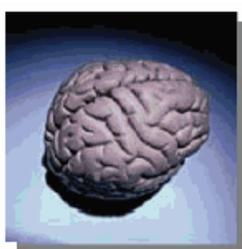
( articolo divulgativo a cura di Gabriele Martufi <http://gabrielemartufi.altervista.org/> )

## Introduzione

La modellistica fisico-matematica, ovvero il processo che mira a descrivere in termini matematici alcuni aspetti fisici del mondo reale, rappresenta oggi una colonna portante nelle scienze e nell'ingegneria, a completamento dell'analisi teorica e di quella sperimentale. Il Prof. **Alfio Quarteroni**, matematico Italiano (laurea honoris causa in ingegneria navale), tra i massimi esperti in ambito mondiale di modellistica, simulazione e calcolo numerico, evidenzia: come avviene anche in altri settori di ricerca, la modellistica di per sé non è un'attività esclusivamente scientifica, anche se, naturalmente vi sono concetti universali che essa deve riprodurre, quali ad esempio la conservazione di massa e energia di un fluido, del momento d'inerzia di una struttura,...,vi è in effetti anche una componente "artistica" dietro una simulazione di successo, che deriva dal sapere quali domande ha senso porre, quale livello di dettaglio ha senso mettere nelle diverse componenti del modello, quali semplificazioni apportare in modo da favorire una sua integrazione con modelli diversi. In molti settori industriali e dell'ingegneria la modellistica matematica è ormai di uso consolidato. La straordinaria complessità delle applicazioni ingegneristiche/industriali ha spronato i matematici a riconsiderare il loro approccio: non più la scienza e l'ingegneria "vanno verso" l'analisi numerica, ma piuttosto gli analisti numerici "vanno verso" la scienza e l'ingegneria, ovvero pongono al centro della scena il problema in quanto tale e cercano di sviluppare modelli e algoritmi efficienti ed accurati. Questo cambio di paradigma ha determinato l'avvento del calcolo scientifico, ovvero della disciplina che consente di tradurre un modello matematico (risolvibile in forma esplicita solo in rarissime situazioni) in algoritmi che possono essere implementati su calcolatori di straordinaria potenza. L'obiettivo della ricerca in analisi numerica e nel calcolo scientifico è la costruzione di algoritmi migliori per una simulazione efficace ed accurata (nei limiti della tolleranza prescritta) e per l'ottimizzazione di problemi di interesse reale che si incontrano nelle scienze e nell'ingegneria. In molte aree applicative, non solo la velocità del computer, ma anche l'efficienza degli algoritmi costituisce un fattore cruciale, per la fattibilità (o non fattibilità) di risoluzione di un problema ingegneristico. La matematica non è solo un linguaggio, essa aggiunge valore: approfondimento della conoscenza, progettazione di algoritmi efficienti, ricerca di soluzioni ottimali. I modelli matematici se accuratamente sviluppati, possono offrire nuove possibilità per dominare la complessità ed esplorare nuove soluzioni, essi si ottengono spesso via astrazione, l'innovazione richiede flessibilità, la flessibilità richiede astrazione, il linguaggio dell'astrazione è la matematica.



4. Rappresentazione schematica



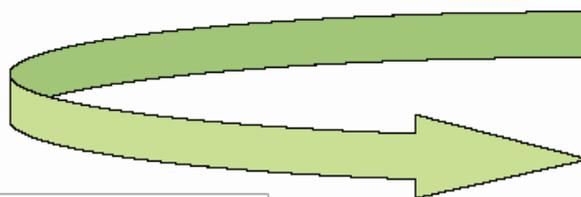
3. Meditazione



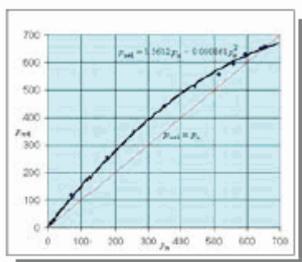
2. Osservazione



1. Realtà



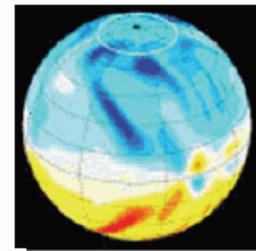
5. Modello matematico



6. Modello numerico e Algoritmo



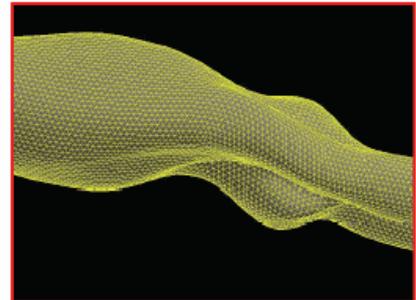
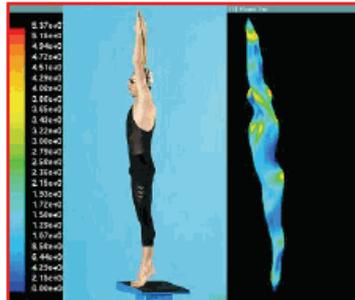
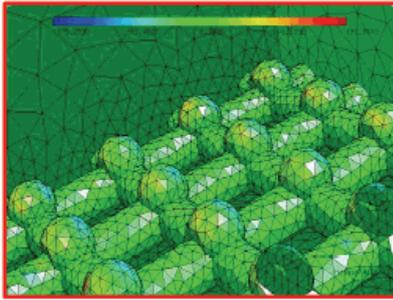
7. Programma di calcolo



8. Analisi risultati



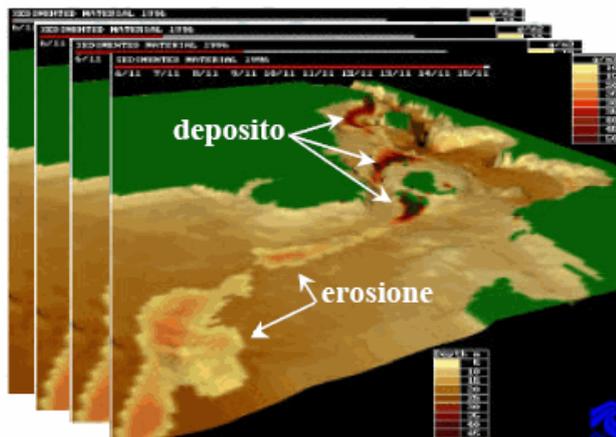
alcune applicazioni della CFD



studio delle caratteristiche del tessuto di un costume da bagno da competizione per la minimizzazione della resistenza all'avanzamento del nuotatore



Collegamento Danimarca – Svezia  
(ponte di Øresund, Mar Baltico)  
MIKE 3 – Danish Hydraulic Institute

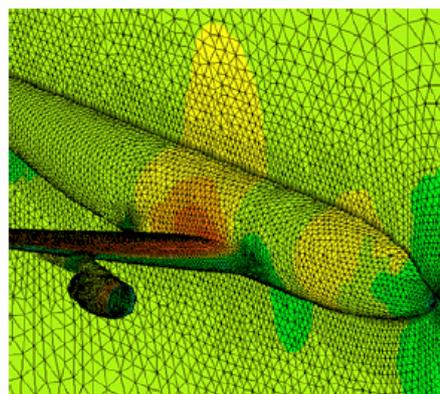
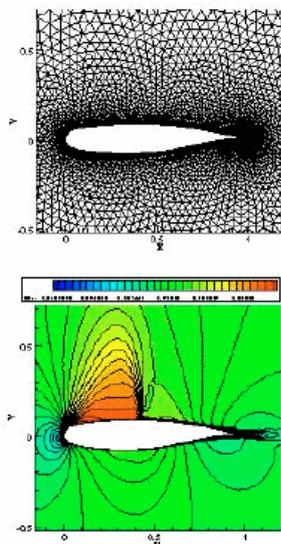


studio di impatto ambientale: influsso della struttura sulle correnti marine

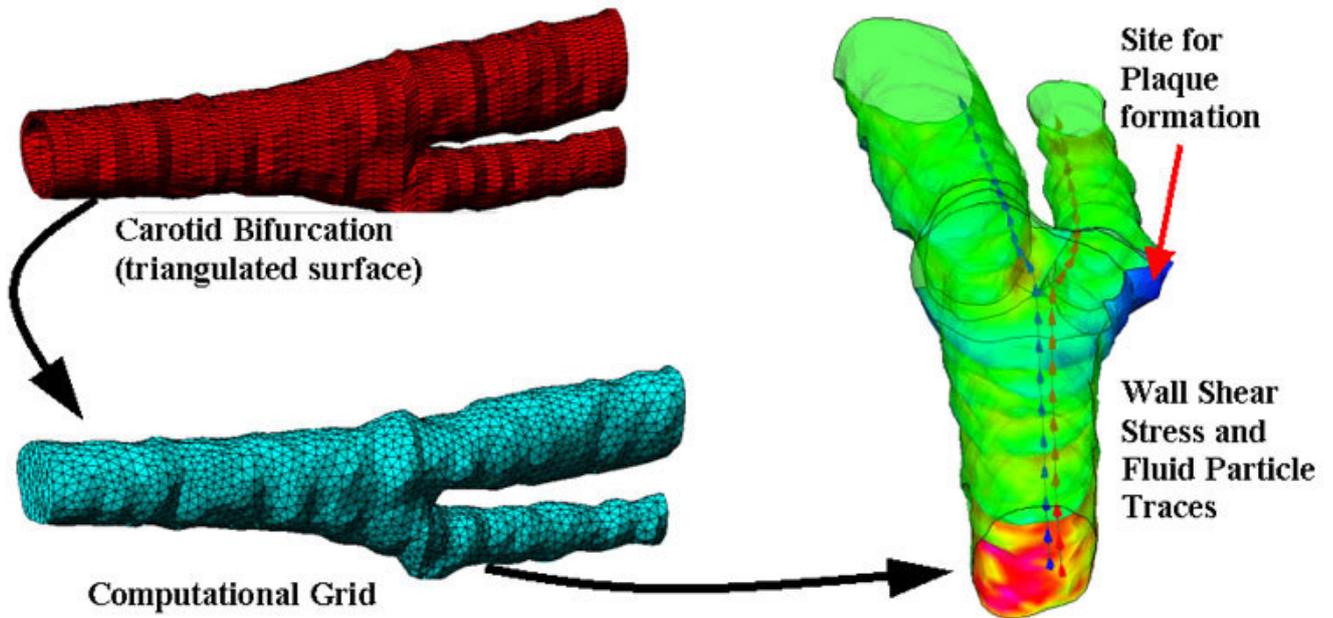
in particolare da valutare l'evoluzione batimetrica del fondo (erosione e/o deposito)

accoppiamento campo fluidodinamico – moto dei sedimenti

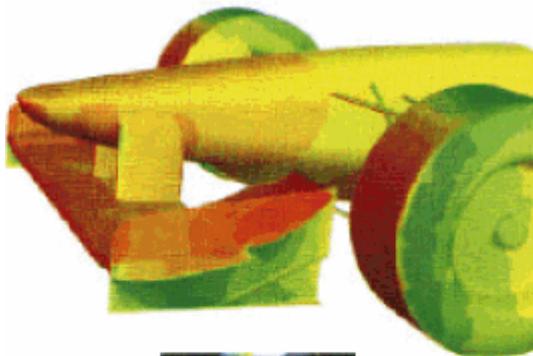
studio numerico associato a programma di monitoraggio sperimentale



studio dell'aerodinamica di un'ala di un aereo di linea



modello per lo studio della formazione delle placche in un vaso sanguigno (biforcazione carotidea)



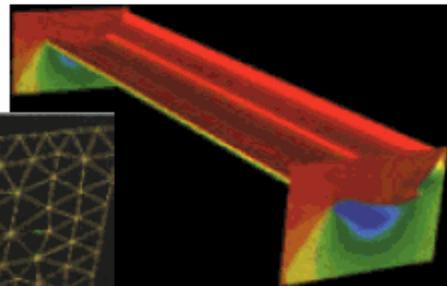
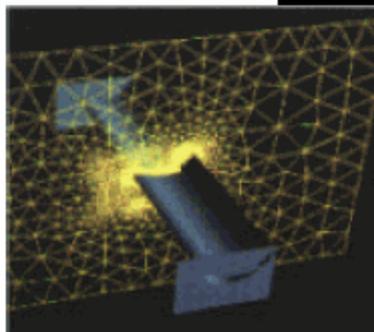
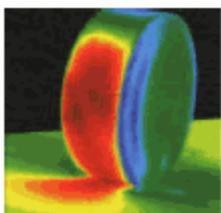
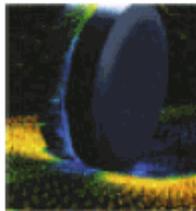
### Benetton B195

griglia non strutturata

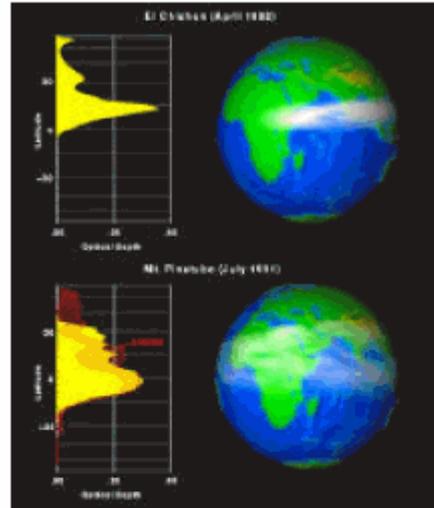
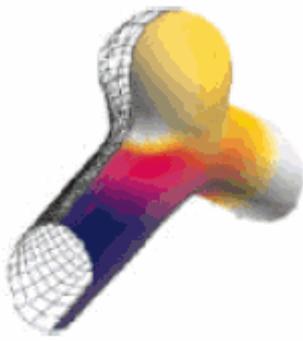
condizioni al contorno complesse

elevate velocità locali  $\Rightarrow$  non trascurabili gli effetti della comprimibilità

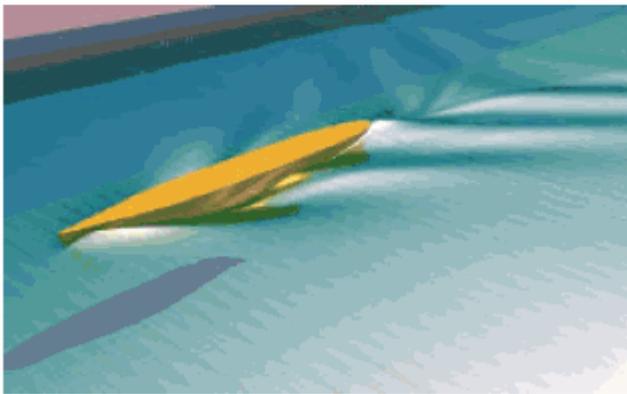
dieci workstation HP9000 in parallelo  $\Rightarrow$  campo da 250.000 celle in una notte



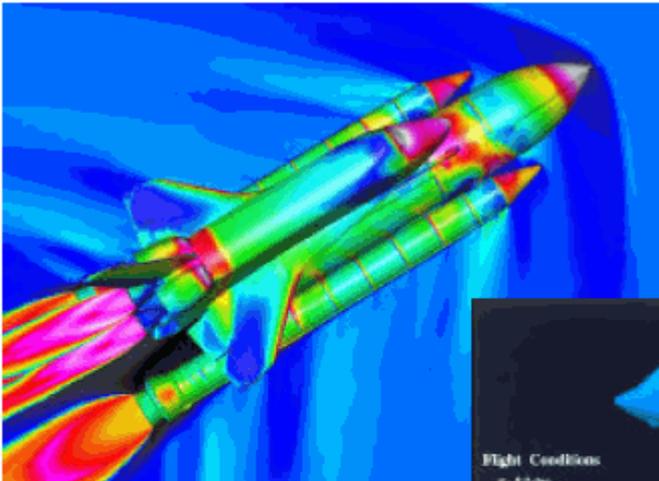
**aneurisma cerebrale**



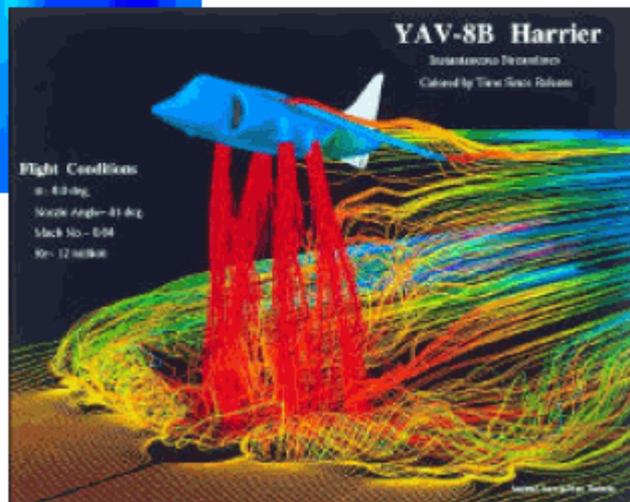
**nuvole di emissioni vulcaniche nella stratosfera**

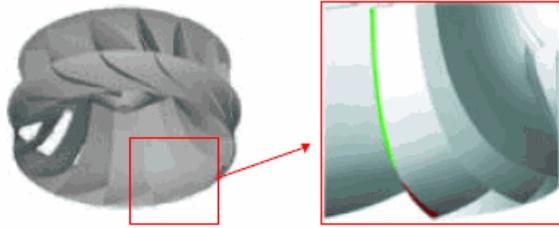


**scafo marino**



**NASA**





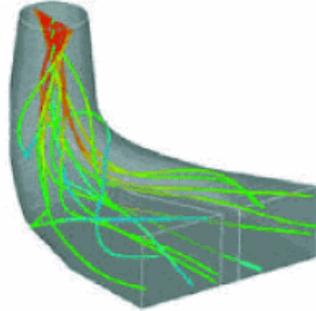
**Impianto idroelettrico a Québec (Canada)**

turbina Francis

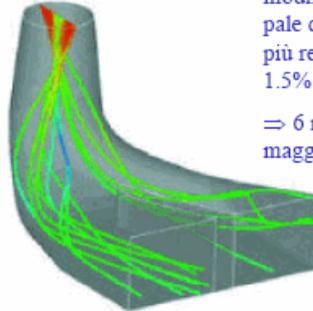
moti secondari nel diffusore ⇒ riduzione efficienza

modifica del disegno delle pale del rotore ⇒ flusso più regolare ⇒ aumento 1.5% dell'efficienza

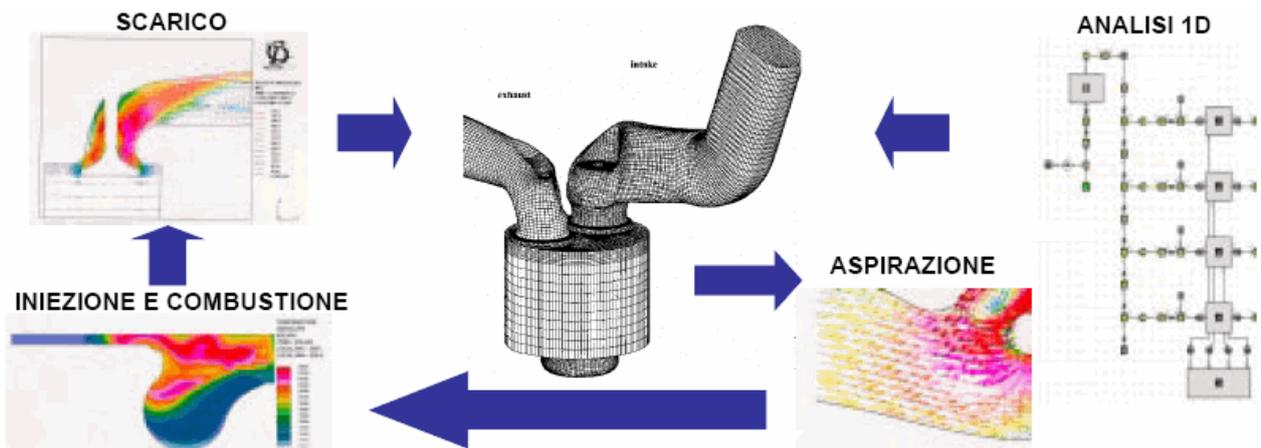
⇒ 6 miliardi £ /anno di maggiore produzione



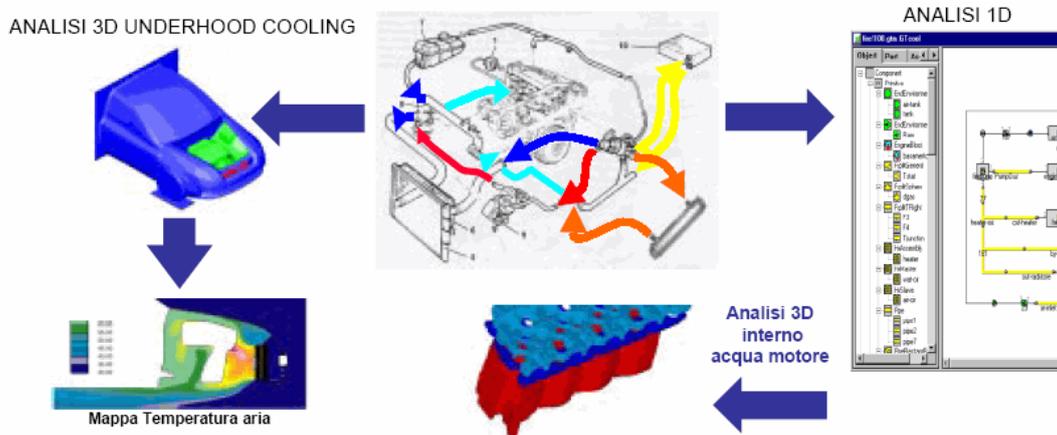
diffusore, pala originale



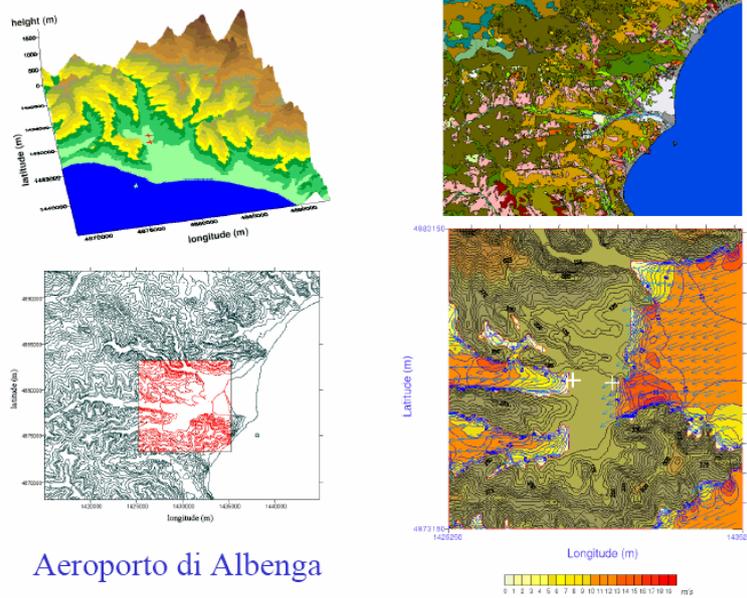
diffusore, pala modificata



simulazione fluidodinamica di un motore diesel JTD (Caterina Venezia)

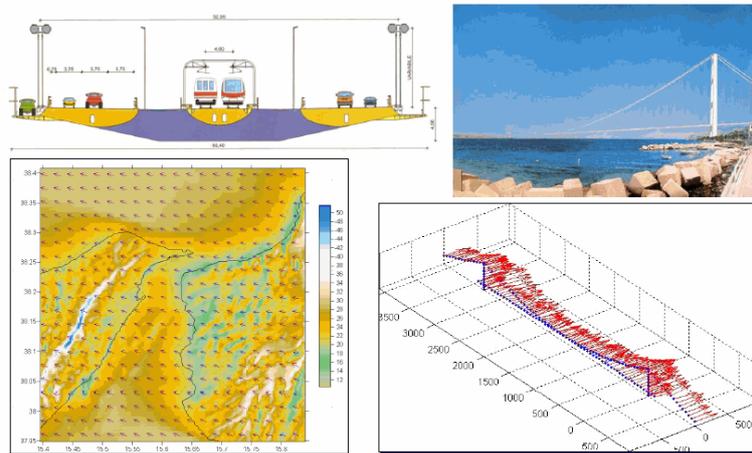


simulazione fluidodinamica del sistema di raffreddamento di un motore (Francesco Perna)



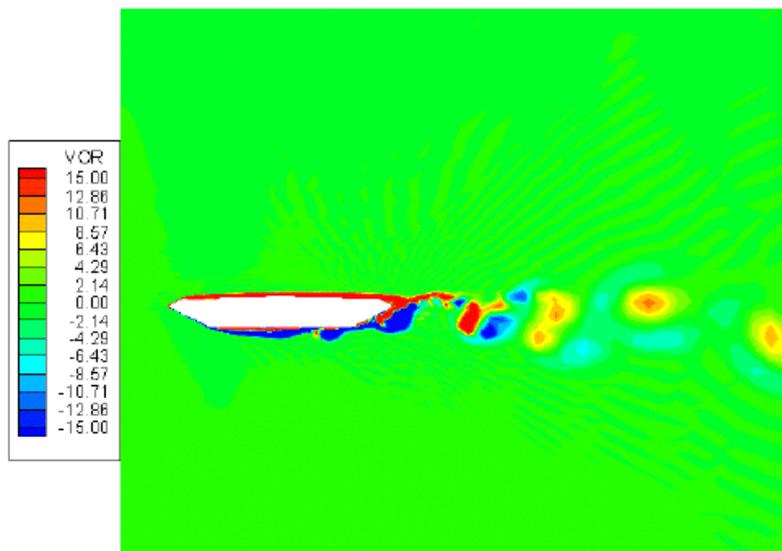
Aeroporto di Albenga

**simulazione numerica di campi di vento in terreni complessi (Aeroporto di Albenga)**



Vento di progetto per il Ponte sullo Stretto di Messina

**simulazione numerica di campi di vento in terreni complessi (Stretto di Messina)**



**studio per il miglioramento aerodinamico di un impalcato di un ponte sospeso, simulazione del distacco dei vortici di Von Kármán (vortex shedding)**

## Note. Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM - Finite Element Method). Cenni storici.

La realtà è pluridimensionale, questa affermazione è, in sostanza, il motivo dell'interesse a sviluppare modelli matematici su equazioni a derivate parziali. Spesso anche un modello che utilizza equazioni differenziali ordinarie è il risultato di una semplificazione di un modello originariamente formulato in più variabili. Nella riduzione del modello si utilizzano solitamente ipotesi che riguardano la geometria (esistenza di simmetrie o di dimensioni trascurabili rispetto ad altre) oppure lo stato di un sistema (tipicamente il passaggio allo stato stazionario) o ancora la natura di un corpo (isotropia, omogeneità). Avvolte queste ipotesi permettono un'utile semplificazione del modello, ma questa non può essere la situazione generale. Per determinati obiettivi la forma particolare di un corpo, la sua composizione eterogenea e/o la presenza di stati transitori non possono essere trascurati senza che il modello perda di utilità. Di conseguenza si ha un aumento nel modello del numero delle dimensioni spaziali e/o l'introduzione di una variabile tempo. Il modello cresce di complessità, ma in corrispondenza (almeno questa è la speranza!) aumenta la sua capacità di "rappresentare" un fenomeno "reale". Mediante l'impiego di equazioni differenziali è possibile descrivere il comportamento di problemi di varia natura: la risoluzione di equazioni riguardanti la teoria dell'elasticità permette, ad esempio, di studiare il comportamento di un corpo solido sotto l'influenza di carichi diversi e di calcolarne pertanto deformazioni, spostamenti e sollecitazioni (problema elastico), più in generale la risoluzione delle equazioni della fisica-matematica (l'equazione del calore, l'equazione di Laplace, l'equazione delle onde,...) consentono la soluzione dei più svariati problemi applicativi così come la risoluzione delle equazioni di Eulero o Navier-Stokes ci consentono di descrivere il comportamento dei fluidi, le equazioni di Maxwell costituiscono un'utile rappresentazione matematica dei campi elettromagnetici e così di seguito per altri problemi.

Nei casi semplici la risoluzione delle equazioni differenziali può essere fatta analiticamente ma, nel caso di sistemi più complessi di interesse applicativo/ingegneristico, che normalmente si riscontrano nella pratica ciò diviene impossibile. Per tale motivo gli approcci matematici che permettono di impiegare una approssimazione numerica risultano i più indicati. Tra questi, uno dei metodi numerici che si è dimostrato particolarmente efficace è il metodo degli elementi finiti abbreviato con FEM (Finite Element Method). Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali. Il metodo degli elementi finiti consiste nella "discretizzazione" di un assegnato dominio in "elementi" fra loro connessi in un numero "finito" di punti, vertici degli elementi chiamati "nodi", in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti di spostamenti incognite primarie del problema (nel caso del problema elastico). Lo stato tensionale e deformativo (problema elastico) all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune "funzioni di forma". La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di "mesh" con cui discretizzare il dominio e' di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.

Le origini del FEM. Un primo approccio al metodo di calcolo per elementi finiti era già comparso nella Grecia antica: **Eudoxus Von Knidos** (Eudoxos Von Cnidus) (408–355 A.C.) e più tardi **Archimede Di Siracusa** (287-212 A.C.) utilizzavano dei modelli matematici semplificati per risolvere problemi più complessi: Eudoxus usava forme geometriche semplificate per calcolare lunghezze, superfici e volumi, Archimede immaginava un modello di calcolo per determinare la circonferenza di un cerchio, al posto di cercare una soluzione per un numero infinito di punti situati sul cerchio egli cercava di calcolare la somma di un numero, sempre più elevato, ma finito, di corde (metodo di esaurimento).

Nel XIX secolo e più precisamente nel 1851, **Karl Heinrich Schellbach** (1805-1892) descrive la soluzione di un problema di superficie minimale, questa soluzione sarà quella che più si avvicinerà al metodo di calcolo per elementi finiti. Più tardi, nel 1909 **Walter Ritz** (1878–1909) e nel 1915 **Lord Rayleigh (John William Strutt)** (1842–1919) pubblicheranno degli articoli che saranno il fondamento del calcolo FEM, altresì da segnalare il lavoro di **Boris Grigorievich Galerkin** (1871-1945) che nel 1915 pubblicò un suo metodo di integrazione approssimata delle equazioni differenziali oggi conosciuto come metodo di Galerkin (Galerkin method).

Grazie agli studi di Ritz e Rayleigh, nel corso degli anni '20 ci si rende conto che i problemi possono essere risolti più facilmente se, per descrivere lo stato degli spostamenti dei solidi, si utilizzano delle funzioni di base (funzioni di forma) e un principio variazionale. Inizialmente, tutti gli studi basati sul principio variazionale utilizzavano delle funzioni di base globali, riferite pertanto all'insieme della struttura.

In seguito, il matematico **Richard Courant** (1888-1972) descrisse, a partire dal 1943 nella sua opera ***Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations*** come utilizzare nella formulazione di Ritz delle funzioni di base con supporti locali e come il calcolo FEM possa essere eseguito a partire da questo principio.

Va altresì precisato che le idee di Courant si basavano sulle riflessioni del matematico **Leonhard Euler** (1707-1783) il quale, a sua volta, partendo dai lavori di **Pierre De Fermat** (1601-1665), **Jakob Bernoulli** (1655-1705) e **Johann Bernoulli** (1707-1783) ha sviluppato il calcolo variazionale, ed ha formulato nel 1743, il **Principio del più Piccolo Effetto** e ha aperto la via al calcolo FEM con la sua opera fondamentale ***Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes Sive Solutio***

**Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti.** In sintesi l'idea di Ritz e Courant fu quella di descrivere il comportamento globale di un sistema complesso unendo più funzioni parametriche semplici ciascuna delle quali rappresentativa di una parte del sistema stesso. Partendo da questo concetto, la risoluzione di equazioni differenziali altro non è che la risoluzione delle incognite di un sistema di equazioni algebriche più semplici. Le incognite da calcolare sono, a seconda della situazione/applicazione, uno spostamento, una temperatura, un potenziale magnetico,...., per delle strutture complesse i sistemi di equazioni algebriche possono diventare enormi con un numero di incognite da calcolare che può andare da qualche migliaia fino a diversi milioni!

Pertanto il lavoro di Courant, non aveva all'epoca nessuna applicazione pratica in quanto l'impiego di funzioni di base, una per ciascun elemento della formulazione FEM, porta ad un sistema di equazioni contenenti un numero enorme di incognite che risultava impossibile da risolvere senza un calcolatore elettronico. Dunque, non sorprende il fatto che il calcolo FEM si sia potuto sviluppare solamente quando i computer hanno raggiunto una adeguata potenza di calcolo (vedi di seguito).

All'inizio degli anni '60 comparvero i computer necessari ad effettuare tali calcoli e quindi i concetti di Courant poterono essere applicati. I primi lavori in questo campo sono dovuti a **John H. Argyris** (1913–2004) (dell'Imperial College di Londra poi passato all'Università di Stoccarda a partire dal 1959) e a **Olgiard Cecil Zienkiewicz** (1921). L'opera di Zienkiewicz è considerata come la prima monografia ingegneristica nel campo del calcolo per elementi finiti e si diffuse rapidamente nelle applicazioni delle scienze ingegneristiche. E' anche doveroso ricordare altri matematici e ingegneri che hanno dato dei contributi importanti quali: **A. Hrennikoff** (**Solutions of Problems in Elasticity by the Framework Method**, 1941), **D. McHenry** (**A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems**, 1943), **Rudolf Zurmühl** (1904-1966), **Karl Marguerre** (1906-1979), **Eduard Pestel** (1914-1988), **Richard H. Gallagher** (1928-1997).

Parallelamente agli studi di Argyris (**Energy Theorems and Structural Analysis**, 1960) e Zienkiewicz (**The FEM in Structural and Continuum Mechanics**, 1967) dal 1956 fino agli anni '70 un contributo fondamentale è opera dei ricercatori **Edward L. Wilson**, **Ray W. Clough** (**Raymond Clough**), **Klaus-Jurgen Bathe** dell'University of California, Berkeley.

Il metodo di calcolo per elementi finiti diviene una formulazione generale nell'ambito della meccanica delle strutture nel 1956 quando viene utilizzato con successo nella **Boeing Airplane Company** da **M. J. Turner**, **Ray W. Clough**, **Harold C. Martin** e **L. P. Topp** per la risoluzione di problemi complessi di ingegneria strutturale aeronautica che pubblicano **Stiffness and Deflection of Complex Structures**.

La denominazione *il "metodo degli elementi finiti"* è utilizzato nel 1957 per la prima volta proprio dall'ingegnere Clough che, in seguito, nel 1960 pubblica **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**, "coniando" universalmente la denominazione **Finite Element Method (FEM)**.

L'ingegnere civile strutturista **Wilson** fu il primo a migliorare la chiarezza del calcolo strutturale attraverso l'apporto della notazione matriciale, estendendo successivamente tale metodo di calcolo, nell'ambito dell'industria e nell'ingegneria aeronautica. La notazione matriciale diventa infatti necessaria, per affrontare un problema, quando si lavora con delle strutture complesse che richiedono dei sistemi di equazioni con numerosi gradi di libertà. I sistemi di equazioni con molti gradi di libertà (indicativamente con più di 10 gradi di libertà nel caso in cui il calcolo sia fatto manualmente) non poterono essere risolti in un arco di tempo ragionevole fino agli anni '50. La necessità di studiare delle strutture in griglia che implicassero 50 o più gradi di libertà si è fatta sentire soprattutto nell'industria aeronautica e parallelamente nell'ingegneria civile strutturale, ma la possibilità di risolvere questo genere di problemi è divenuta possibile solamente con l'introduzione dei primi calcolatori.

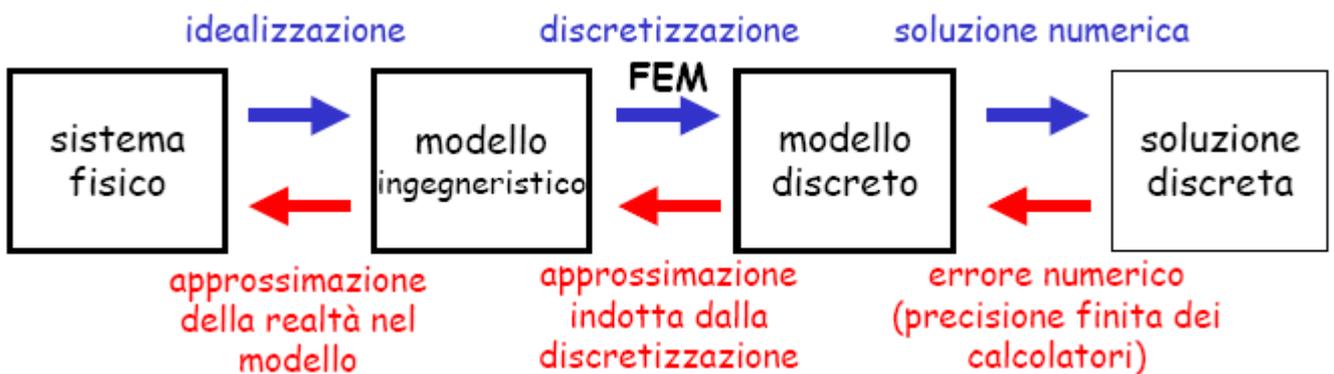
Nel 1963 Wilson e Clough sviluppano il **SMIS (Symbolic Matrix Interpretive System)** un software, basato sull'analisi matriciale delle strutture, per analisi strutturali statiche e dinamiche. Successivamente con l'avvento del linguaggio di programmazione **FORTRAN**, nel 1969 Wilson inizia lo sviluppo del **SAP (Structural Analysis Program)** e nel 1973 è disponibile il **SAP IV** il primo programma di calcolo strutturale distribuito su scala mondiale, è iniziata l'era dei software di calcolo strutturale.

Negli anni '70, i calcoli FEM erano effettuati unicamente in grandi aziende, università o in centri di calcolo da personale altamente specializzato (NASA, BOEING, IBM, COMPUTERS AND STRUCTURES INC. - BERKELEY). A quel tempo i programmi disponibili richiedevano per il loro funzionamento delle macchine enormi (mainframes), che solo poche società potevano permettersi. I risultati venivano stampati su migliaia di fogli e dovevano poi essere analizzati.

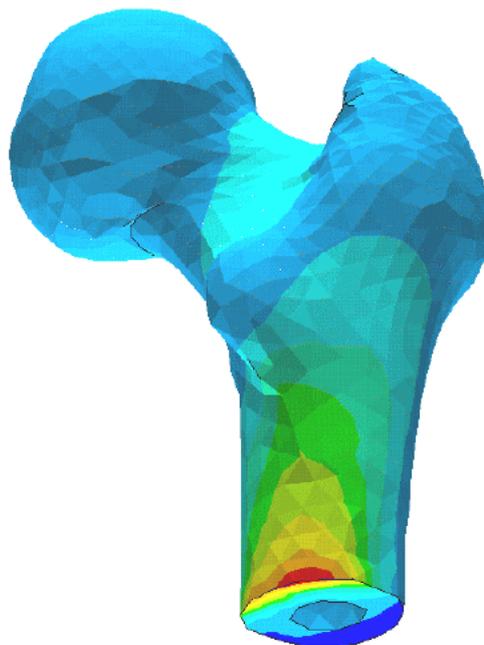
Oggi, avendo a disposizione computer decisamente più potenti che in passato, si possono elaborare modelli più complessi in minor tempo, grazie inoltre alle interfacce grafiche ora disponibili, si può preparare un modello e ottenerne i risultati con un decimo del budget necessario in passato. Poiché la fase di "modellizzazione" resta ancora la fase più lunga e delicata del metodo di calcolo, si cerca, sempre più spesso, di partire direttamente da modelli geometrici prodotti attraverso **CAD (Computer Aided Design)**. Il metodo degli elementi finiti è attualmente uno strumento potente e disponibile a dai costi ragionevoli. Il tempo di modellizzazione è ormai considerevolmente ridotto in quanto anche l'utilizzo dei programmi di calcolo è divenuto estremamente agevole. Va altresì evidenziato che anche se il calcolo FEM è diventato sempre più accessibile con la disponibilità sempre più di software "user friendly", la conoscenza delle teorie

che ne stanno alla base, la conoscenza dei suoi limiti di applicabilità, l'interpretazione dei risultati, continuano ad essere e sono di competenza dell'analista numerico esperto. Ciò è ancor più vero oggi che in passato in quanto il calcolo FEM non sostituisce le conoscenze tecniche dell'ingegnere e nemmeno la sua padronanza della fisica, il calcolo FEM è solo uno strumento e pertanto risulta veramente efficace solo quando è impiegato da personale altamente qualificato e con esperienza. Oggi nell'industria, grazie al metodo di calcolo per elementi finiti, i prodotti possono essere studiati e ottimizzati a partire dalla fase di progettazione fino alla loro effettiva realizzazione. Così facendo è possibile ridurre contemporaneamente sia il tempo di progettazione che il numero di prototipi. Il calcolo FEM permette inoltre di economizzare le risorse e di ottenere dei prodotti innovativi e di miglior qualità. Il FEM permette oggi di rispondere a numerosi quesiti nell'ambito dell'ingegneria (civile, meccanica, navale, aerospaziale, aeronautica,...) e delle scienze applicate, le sue applicazioni sono vastissime solo per citarne alcune: calcolo strutturale nel campo della statica, della dinamica, della geotecnica, della meccanica, analisi termiche, analisi di componenti MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), studio della fisica dei fluidi, analisi acustiche, bioingegneria, applicazioni industriali,..., in casi in cui diversi fenomeni fisici sono associati tra loro è il caso dei problemi accoppiati (multifisica). Alcuni dei maggiori ricercatori contemporanei: **Boerje Langefors, Ivo M. Babuska, Peter Wriggers, Erwin Stein, Robert L. Taylor, Philippe G. Ciarlet.**

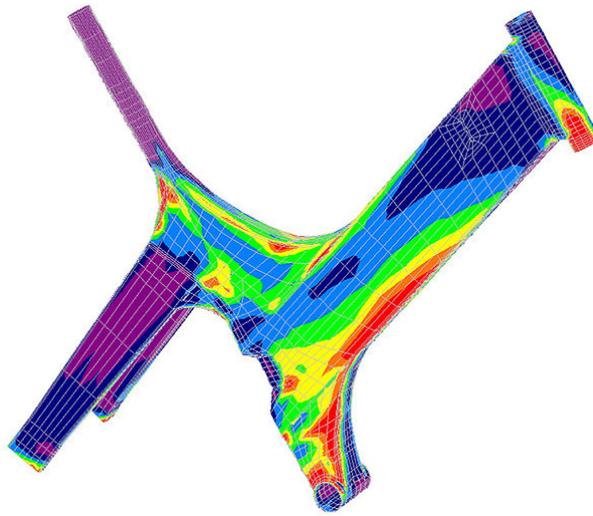
### modellazione FEM e alcune fonti di errore



### alcune applicazioni del FEM, esempi di Analisi agli Elementi Finiti FEA (Finite Element Analysis)



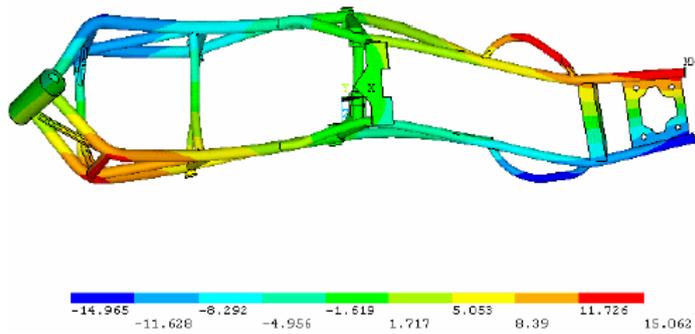
distribuzione delle tensioni massime in un femore non omogeneo



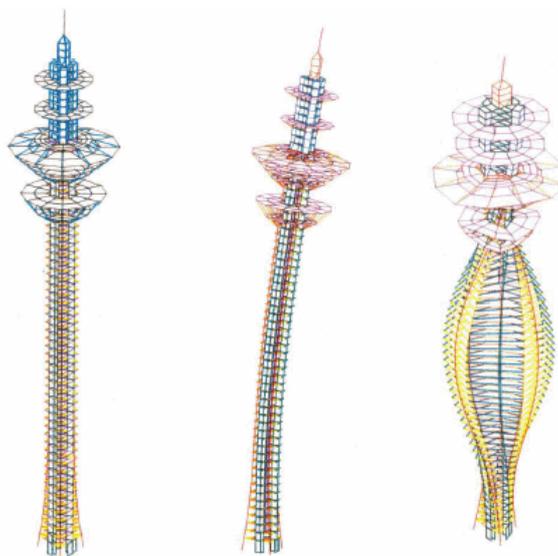
studio per il miglioramento di una mountain bike da competizione, distribuzione delle tensioni massime

STEP=1  
 SUB =9  
 FREQ=124.851  
 DY (AVG)  
 DMX =18.223  
 SMX =-14.965  
 SMI =-15.062

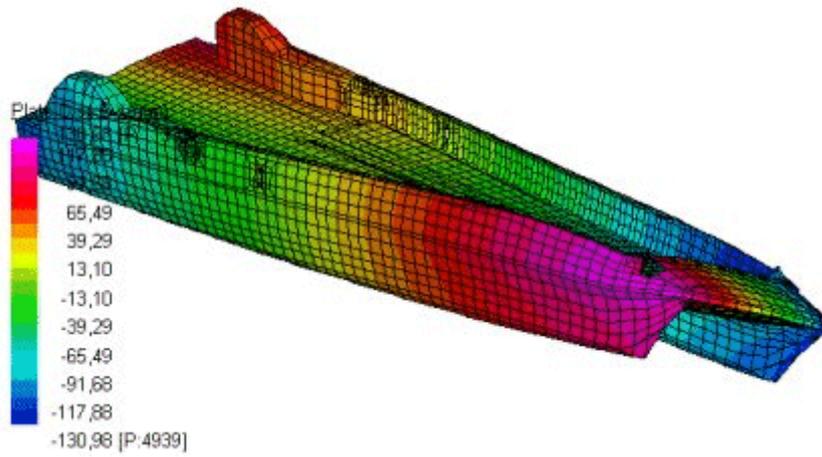
DEC 6 2004  
 16:33:56



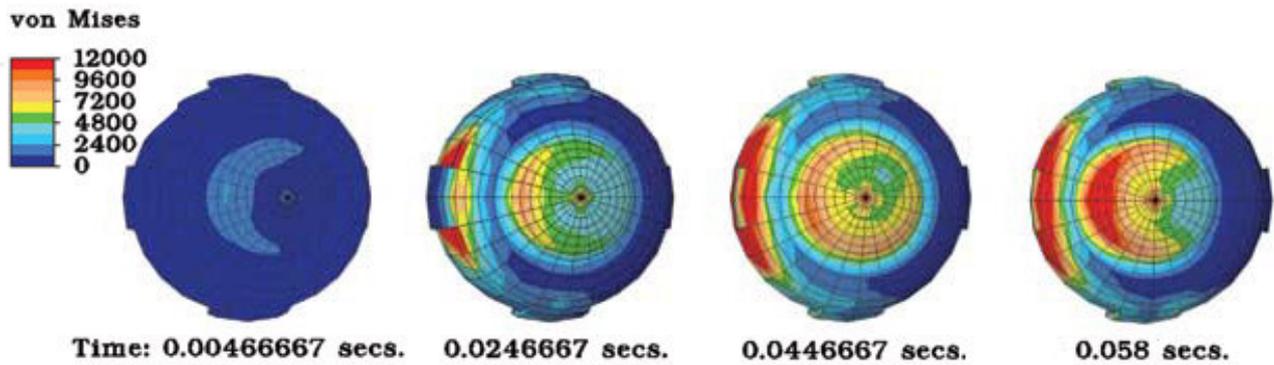
analisi dinamica del telaio di una moto da competizione, III° modo proprio



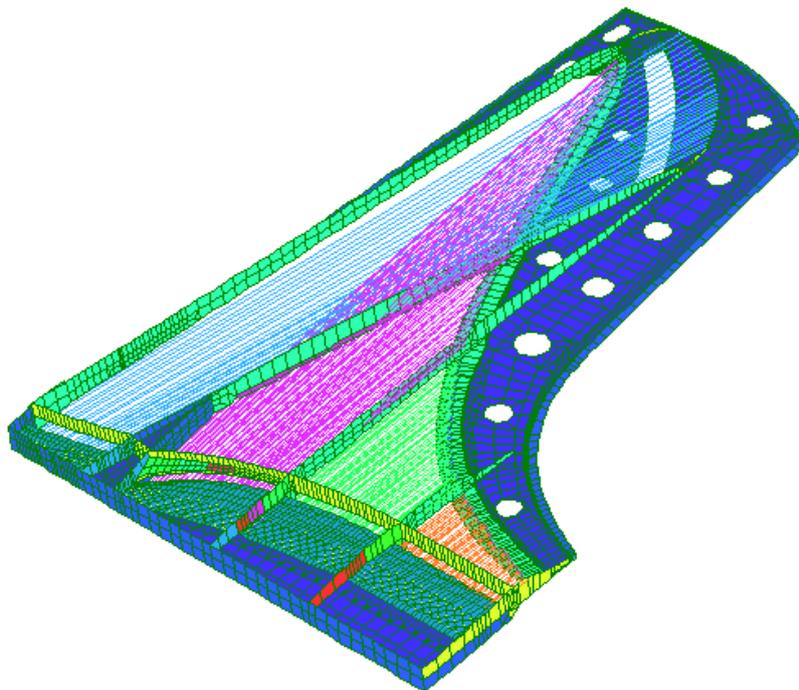
analisi dinamica di una torre per comunicazioni: modello FEM, I° modo flessionale, II° modo torsionale



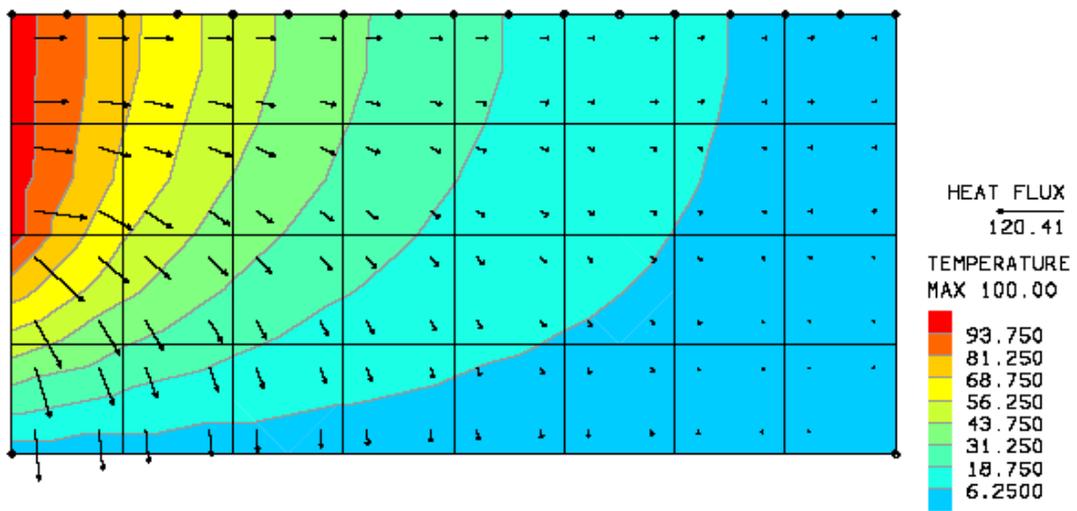
analisi dinamica di un catamarano, II° modo torsionale



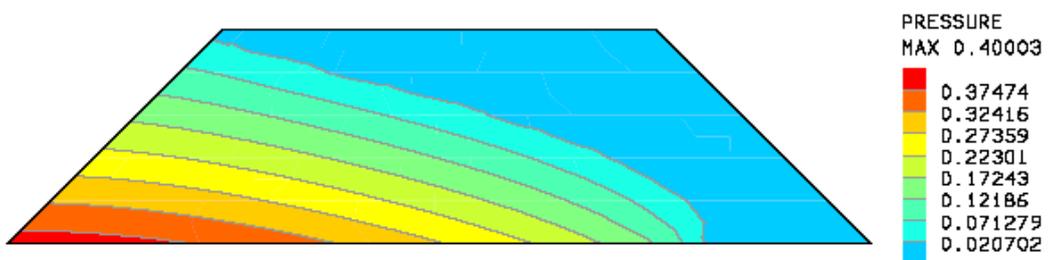
studio delle tensioni in un occhio umano in movimento



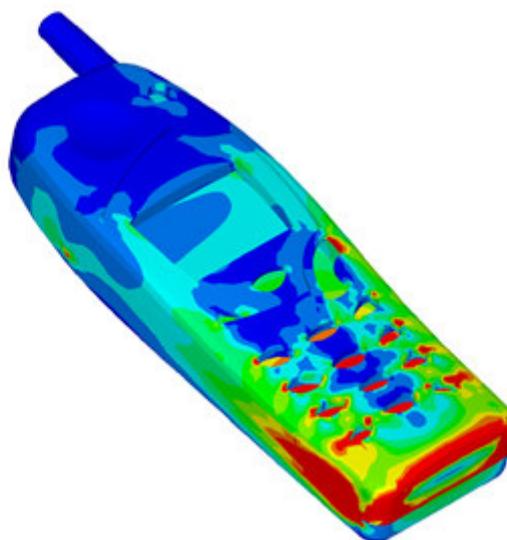
modello FEM di un pianoforte



distribuzione della temperatura in una piastra



linee di flusso in una diga in terra, (problema di filtrazione)



“drop test” di un cellulare

## Problemi Accoppiati - Multifisica

Direct Coupled Physics	Applications
Pressure-Structural (Inviscid FSI)	Acoustics, sonar, SAW
Piezoelectric	Microphones, sensors
Piezoresistive	Pressure sensors, strain gauges, accelerometers
Circuit coupled electromagnetics	Motors, MEMS
Electrostatic-structural	MEMS
Electro-thermal-structural-magnetic	IC, PCB, electro-thermal stress, MEMS actuators
Fluid-thermal	Piping networks, manifolds
Interactive Coupled Physics	Applications
Thermal-structural	Anything with a structure! Gas turbines
Electromagnetic – thermal	Induction heating, RF heating
Electrostatic – structural-fluid	MEMS
Electrostatic – charged particle	Ion optics, field emission display technology, analytical instruments
Magnetic – structural	Solenoids, electromagnetic machines
Fluid Structure Interaction	Aerospace, automotive fuel, hydraulic systems, fluid bearing, MEMS fluid damping, drug delivery pumps, heart valves
Thermal-CFD	Electronics cooling
Multi-field Solver	Many! All of the above!
Third-party product coupling: Sigfit: unidirectional, structural – optical	Automotive lighting, astronomy, any optical instruments

Molti problemi di natura fisica, del mondo reale, che gli ingegneri devono affrontare e risolvere coinvolgono l'interazione simultanea di due o verosimilmente più fenomeni fisici, difatti la maggior parte dei problemi ingegneristici (a rigore tutti) presentano un certo grado di interazione di vario genere, questa importante e vastissima classe di problemi vengono abitualmente denominati come "problemi accoppiati" o multifisica. Fluidi come aria, vento, acqua,..., possono interagire con elementi strutturali tipo edifici, ponti sospesi, grattacieli, dighe, strutture offshore, componenti meccanici, aeromobili, contenitori in pressione,..., in tal caso si parla di interazione fluido-struttura (FSI - Fluid-Structure Interaction). Nell'ambito dell'ingegneria strutturale l'FSI riveste un'importanza primaria: trattasi di un vero fenomeno multi-fisico nel quale un fluido, fluendo intorno o all'interno di una struttura, causa dei cambiamenti di forma nelle pareti indotti da pressioni e/o forze di taglio, o innesca dei moti/rotazioni. In alcuni casi la FSI può essere stazionaria, ovvero le forze indotte dal fluido sono esattamente bilanciate dalle forze di reazione interne della struttura, raggiungendo una deformazione di equilibrio nel flusso stesso, ma più spesso

l'FSI è un fenomeno transitorio, nel quale la deformazione della struttura è dinamica e varia nel tempo. In entrambi i casi la FSI coinvolge l'accoppiamento multi-fisico tra la meccanica dei fluidi (fluidodinamica) e quella dei solidi (teoria elastica). Altri tipici esempi di problemi accoppiati (vedi tabella) sono: termico-strutturale, acustico-strutturale, geo-meccanica, elastodinamica, problemi di impatto e analisi di crash, poroelasticità, interazioni chimico-meccaniche, deformazione-diffusione di fasi e componenti, fenomeni piezoelettrici, elettromagnetici-meccanici, termico-elettrico. La simulazione di ciascuno di questi fenomeni fisici (ogni fenomeno fisico è dominato da leggi e modelli matematici diversi) può essere definito come un sistema. Va precisato che in molti casi, gli ingegneri possono assumere che, per quanto riguarda l'aspetto pratico dell'analisi, gli effetti di un sistema non si trasmetta immediatamente sugli altri, oppure che l'interazione, se pur presente, può essere trascurata all'interno di un particolare contesto/problema. Un esempio tipico è la forza esercitata dal vento su un edificio tozzo o la forza idrodinamica esercitata dal mare su una grande e imponente piattaforma offshore, in questi casi, la forza agente sulla struttura può essere calcolata assumendo questa come rigida e, conseguentemente, trascurando la sua interazione con il fluido. Il ruolo degli strumenti analitici tradizionali è limitato in quanto non sono in grado di risolvere il problema accoppiato completo, pertanto gli ingegneri eseguono analisi approssimate, in alcuni casi questo conduce a sovra-dimensionamenti eccessivi (pur di rimanere in sicurezza!) in altri casi addirittura a progetti completamente sbagliati e pericolosi (si pensi proprio al crollo del ponte sospeso Tacoma Narrows!). La multifisica è un settore di ricerca in piena evoluzione e numerosi e importanti centri di ricerca sono attivi nello sviluppo di metodologie teoriche, numeriche e computazionali per la soluzione di problemi accoppiati. Attualmente sono già disponibili alcuni codici di calcolo che integrano solutori FEM (per analisi strutturale), solutori termici (per analisi di radiazione/convezione/conduzione), solutori CFD (per analisi fluidodinamiche) e codici espliciti per simulazioni di processo e analisi di crash, in grado di interagire fra loro e affrontare i più svariati problemi di multifisica. Questi software sono in grado di trasferire "automaticamente" (per esempio nelle analisi FSI) il campo delle pressioni calcolato dal solutore CFD al solutore FEM e viceversa trasferire gli spostamenti nodali calcolati dal solutore FEM al solutore CFD iterando fino alla convergenza della soluzione, similmente per gli altri problemi accoppiati.

## Bibliografia Essenziale e Testi Consigliati:

- Carlo Gavarini. **Dinamica delle Strutture**. ESA, ROMA
- Erasmo Viola. **Fondamenti di Dinamica e Vibrazione delle Strutture**. (1° e II° Volume), Pitagora Editrice
- Giuliano Augusti, A. Luigi Materazzi, Vincenzo Sepe. **Ingegneria del Vento (Introduzione alla Progettazione Strutturale alla Luce della Nuova Normativa)**. CISM
- Giovanni Solari. **Ricerca, Applicazioni e Didattica nell'Ingegneria del Vento**. Università degli Studi di Genova. Abstract
- Gianfranco Chicocchia. **Principi di Aeroelasticità**. Levrotto & Bella
- Luca Cavagna, Giuseppe Quaranta, Paolo Mantegazza. **Aeroelasticità Computazionale con Modelli CFD**. Politecnico di Milano, Abstract
- Emil Simiu, Robert H. Scanlan. **Wind Effects on Structures: An Introduction to Wind Engineering**. Wiley-Interscience
- Emil Simiu, Robert H. Scanlan. **Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design**. Wiley-Interscience
- Robert Clark, David Cox, Howard C. Jr. Curtiss, John W. Edwards, Kenneth C. Hall, David A. Peters, Robert Scanlan, Emil Simiu, Fernando Sisto, Thomas W. Strganac, E.H. Dowell. A Modern Course - Y. C. Fung. **An Introduction to the Theory of Aeroelasticity**. Dover Publications
- Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman. **Aeroelasticity**. Dover Publications
- S. Murakami, R. N. Meroney, B. Bienkiewicz. **Computational Wind Engineering**. (I° & II° Volume), Elsevier Science
- J. D. Holmes. **Wind Loading of Structures**. Taylor & Francis
- Claës Dyrbye, Svend Ole Hansen. **Wind Loads on Structures**. John Wiley & Sons
- Henry Liu. **Wind Engineering: A Handbook For Structural Engineering**. Prentice Hall Wind And Structures An International Journal, Techno-press
- Leone Corradi Dell'Acqua. **Meccanica delle Strutture (Le Teorie Strutturali e il Metodo degli Elementi Finiti)**. Volume II°, McGraw-Hill (consigliato anche il I° Volume)
- C.A. Brebbia, J.J. Condor. **Fondamenti del Metodo degli Elementi Finiti (per Ingegneri Strutturisti)**. CLUP
- Claudio Borri, Luca Salvatori. **Meccanica Computazionale**. Università degli studi di Firenze. Abstract
- **Innovazione Competitività**. Centro Ricerche Fiat. N°7 anno 2001, Abstract
- Christoph Gebald. **Storia del Metodo degli Elementi Finiti** ( fonte: <http://www.cadfem.ch/> )
- Judith Dupré. **Ponti, la Storia dei Più Famosi e Importanti Ponti del Mondo**. Konemann
- Ray W. Clough, Edward L. Wilson. **Early Finite Element Research at Berkeley**. Abstract
- Marco Mulas. **Quale Futuro Per la Simulazione?** ( fonte: <http://www.ioideo.it/> )
- Valeriano Comincioli. **Analisi Numerica, Metodi Modelli Applicazioni**. McGraw-Hill
- Alfio Quarteroni. **Modellistica Numerica per Problemi Differenziali**. Springer
- Alfio Quarteroni. Fausto Saleri. **Introduzione al Calcolo Scientifico**. Springer
- Alfio Quarteroni. **Modellistica Matematica Per la Simulazione, la Progettazione e l'Innovazione**. MOX - Politecnico di Milano ( fonte: <http://mox.polimi.it/> )
- Francesco Ballio. **La Risoluzione delle Equazioni di Navier-Stokes**. Politecnico di Milano. Abstract
- Abstract vari tratti da **NAFEMS** (National Agency for Finite Element Methods and Standards) The International Association for the Engineering Analysis Community <http://www.nafems.it/> e dalla rivista **Analisi e Calcolo** (A&C) edita dalla CONSEDIT <http://www.consed.it/>

Autore: **Gabriele Martufi**, Bussi sul Tirino (Pescara)

<http://gabrielemartufi.altervista.org/>

(prima pubblicazione anno 1999, ultimo aggiornamento e integrazione marzo 2006)

Tutti i diritti riservati - All rights reserved

1999-2006

**"La matematica onora lo spirito umano. Gottfried Wilhelm Leibniz"**