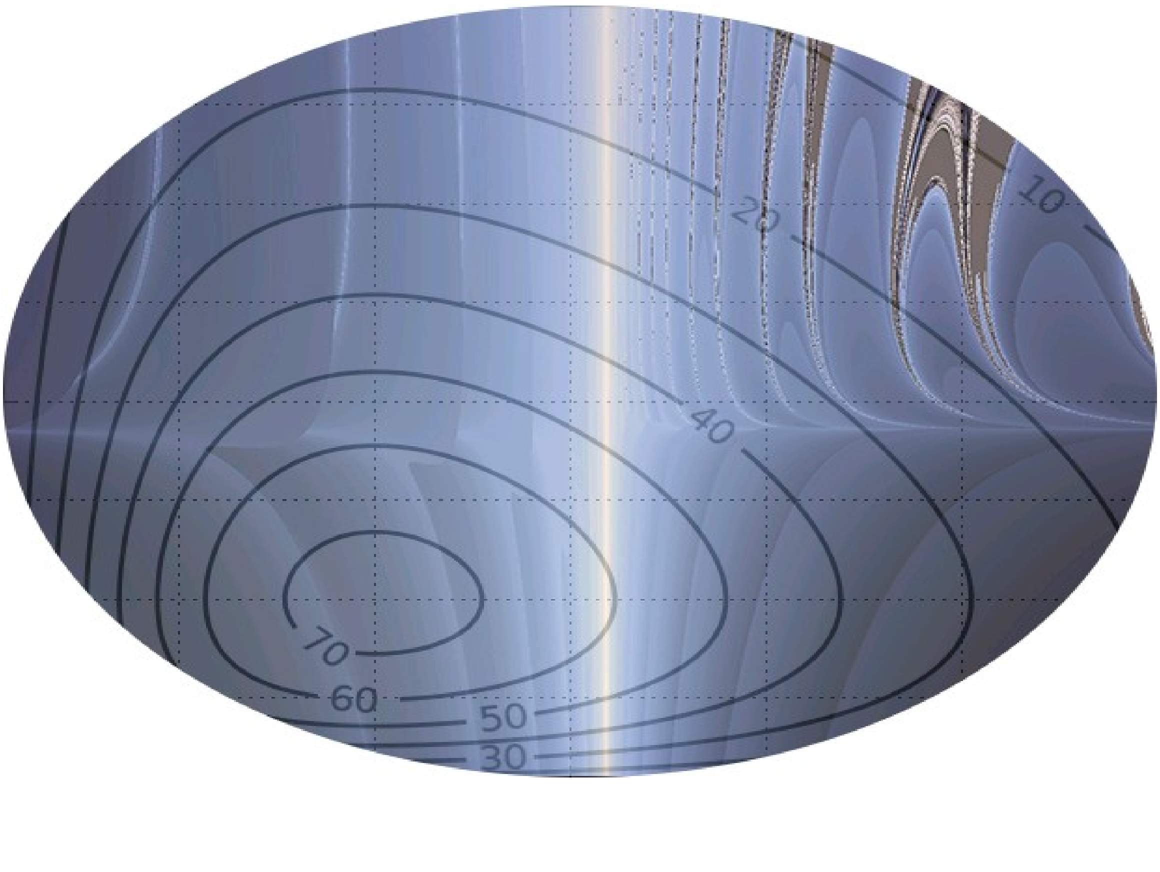
# Sviluppo demografico e fonti energetiche

**Autore: Antonello Urso -** 12/08/10



***Introduzione:***

Lo sviluppo demografico di una popolazione biologica che cresce in funzione del tempo viene provocata da una o più fonti energetiche note della quale essa si nutre. Supporremo che tali fonti siano sparse in modo omogeneo e che la loro posizione possa essere, secondo i casi analizzati, palese o nascosta alla “vista”. Supporremo inoltre di essere in presenza di una popolazione omogenea composta da una singola specie che si sviluppa in un ambiente privo di limiti ambientali che non siano quelli propri dei modelli studiati.

Nel ben noto modello di Lotka-Volterra si considera l’interazione fra due popolazioni: una di prede ($x$) e una di predatori ($y$). Le due popolazioni se si considerano indipendentemente l’una dall’altra, sono ipotizzate maltusiane: cioè, le prede, da sole ($y = 0$), aumenterebbero nel tempo in modo esponenziale mentre i predatori senza prede da cacciare ($x = 0$) si estinguerebbero sempre esponenzialmente. Se invece le prede e i predatori condividono lo stesso ambiente avvengono degli incontri proporzionali al prodotto $xy$ che porterà all'inizio ad una diminuzione per la popolazione di prede, che vengono cacciate, e un aumento del numero dei predatori, che si alimentano e si riproducono.

Quindi avremo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -a_2 y + b_2 xy \end{cases}$$

dove le costanti $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ sono tutte positive. Prendendo spunto da questo esempio cercheremo di costruirci un diverso sistema di equazioni in modo che stavolta le “prede” non possano riprodursi ($a_1 = 0$); questo è il caso di una popolazione che abita in un territorio all'inizio ricco di risorse in numero $x$ sparse in modo omogeneo e sufficientemente nascoste da dover costringere i “predatori” in numero $y$ a ricercarle. [1] [2] [3] [4]

***Primo modello (risorse nascoste)***

Per approntare tale modello matematico ci affideremo alle seguenti ipotesi:

1. La popolazione senza risorse ($x = 0$) è destinata a decrescere esponenzialmente.
2. La quantità di risorse che viene “depredata” nell'unità di tempo è dovuta alla probabilità proporzionale a $xy$ di trovare le risorse sparse nel territorio.
3. L'incremento della popolazione nell'unità di tempo è favorito dalla probabilità proporzionale a $xy$ di trovare le risorse sparse nel territorio.

Naturalmente ci interessa il caso limitato al primo quadrante ovvero a valori non negativi di $x$ e $y$.

Le equazioni che rispondono a queste caratteristiche sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b_1 xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -a_2 y + b_2 xy \end{cases} \qquad (1)$$

Ponendo: $x = \dfrac{a_2}{b_2} X$ ; $y = \dfrac{a_2}{b_1} Y$ ; $t = \dfrac{1}{a_2} T$ si ottiene un sistema riscalato:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = -XY \\ \\ \dfrac{dY}{dT} = -Y + XY \end{cases} \qquad (2)$$

Nella figura sotto possiamo vedere l'orbita nel piano delle fasi con punto di passaggio iniziale: $(X_0; Y_0) = (1; 1)$ e relativo campo direzionale; di seguito l'evoluzione temporale delle risorse $X$ (curva blu) e della popolazione $Y$ (curva nera) nella quale possiamo vedere l'andamento del declino delle risorse nel tempo e l'aumento numerico della popolazione che raggiunge un massimo per poi flettere fino ad estinguersi ancora prima della fine completa delle risorse che non potranno essere utilizzate perché alla fine troppo poche per essere trovate da una popolazione molto esigua.

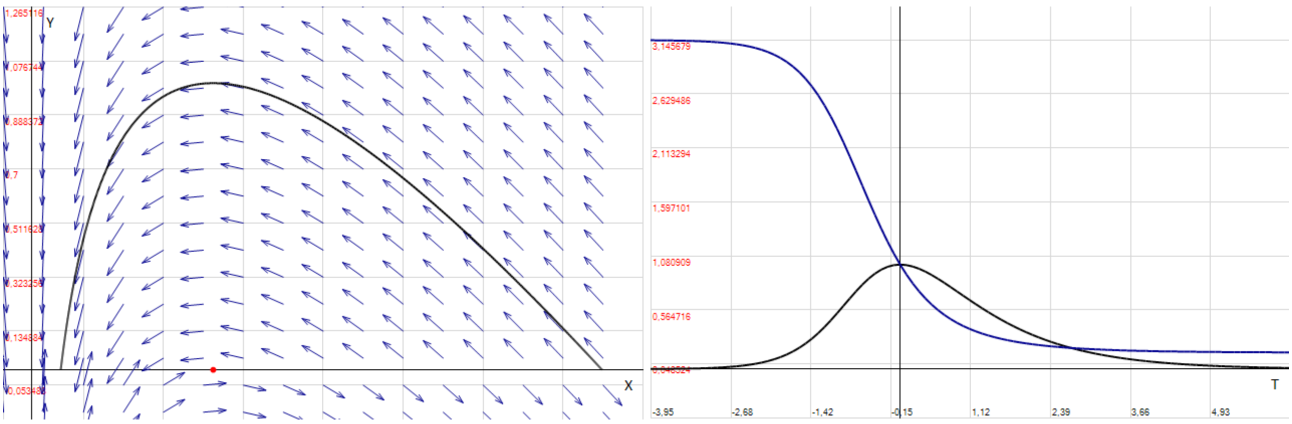


Fig. 1 - primo modello (risorse nascoste)

Il luogo dei punti di equilibrio della (2) si trova in $Y = 0$ . Lo Jacobiano: $J(X;Y) = \begin{pmatrix} -Y & -X \\ Y & -1+X \end{pmatrix}$ ha il determinante nullo per $Y = 0$ e mostra la peculiarità degenere dell'isoclina; in particolare si trova che per $X > 1$ l'equilibrio è instabile, mentre nell'intervallo: $1 > X > 0$ l'equilibrio è asintoticamente stabile.

L'equazione dell'orbita si può ricavare facilmente: $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{-Y + XY}{-XY} = \dfrac{1}{X} - 1$ ; $Y = \ln X - X + C$

Quindi avremo che il campo di esistenza dell'orbita è: $X > 0$ e di conseguenza le risorse non possono in ogni caso estinguersi del tutto. [1]

***Secondo modello (risorse palesi):***

Vediamo adesso un caso molto interessante dove stavolta le risorse possono essere trovate senza difficoltà, ma hanno bisogno di essere estratte ed elaborate per poter essere assimilabili.

1. La popolazione senza risorse ($x = 0$) è destinata a decrescere esponenzialmente.

2. La quantità di risorse che viene “depredata” nell'unità di tempo è proporzionale al numero $y$ della popolazione.

3. L'incremento della popolazione nell'unità di tempo è favorito dal numero di risorse $x$ moltiplicato per il numero $y$ di popolazione che la estrae e la elabora per renderla assimilabile.

L'equazione, opportunamente riscalata, che risponde a queste caratteristiche è la seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = -Y \\ \\ \dfrac{dY}{dT} = -Y + XY \end{cases} \qquad (3)$$

Nella seconda figura possiamo osservare l'orbita nel piano delle fasi con punto di passaggio iniziale: $(X_0;\ Y_0) = (1;\ 0.5)$ e relativo campo direzionale; di seguito l'evoluzione temporale delle risorse $X$ (curva blu) e della popolazione $Y$ (curva nera) nella quale possiamo vedere l'andamento del declino delle risorse nel tempo e lo sviluppo della popolazione che raggiunge un massimo per poi flettere in modo simmetrico fino ad estinguersi insieme alle risorse.

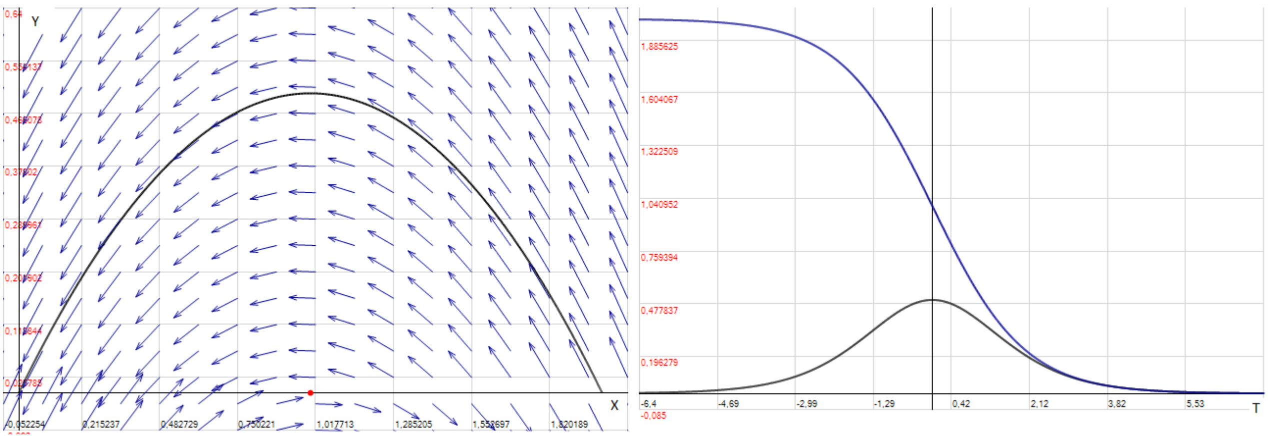


Fig. 2 - secondo modello (risorse palesi)

Il luogo dei punti di equilibrio della (3) si trova in $Y = 0$ . Lo Jacobiano: $J(X;Y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & -1+X \end{pmatrix}$ ha il determinante nullo per $Y = 0$ mostrando la peculiarità degenere dell'isoclina; in particolare si trova che per $X > 1$ l'equilibrio è instabile, mentre nell'intervallo: $1 > X \geq 0$ l'equilibrio è asintoticamente stabile. L'equazione dell'orbita è:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-Y + XY}{-Y} = 1 - X \ ;\ Y = X - \frac{1}{2}X^2 + \mathrm{C}$$

pertanto avremo un arco si parabola che si deve evolvere per: $X \geq 0$ . Affinché tale funzioni abbiano senso possiamo imporre la condizione al contorno $Y = 0$ per $X = 0$ (attrattore), quindi: $\mathrm{C} = 0$ .

Sotto tali condizioni la (3) ammette le seguenti soluzioni:

$$X = \frac{2}{1+e^{T}} \;\; ; \;\; Y = \frac{2e^{T}}{\left(1+e^{T}\right)^{2}} = \frac{1}{1+\cosh T} = \widehat{\mathrm{H}}(T)$$

Come si può vedere l'equazione delle risorse è una semplice funzione logistica decrescente, mentre la funzione riferita alla popolazione è una curva a campana molto importante: la curva di Hubbert. [5] [6] [7]

***Conclusioni***

Questi modelli ci portano a riflettere sulla evoluzione demografica in rapporto alle natura delle risorse. In particolare il secondo modello porta ad interessanti conclusioni; dato che la quantità delle risorse utilizzate è: $X_u = X_{max} - X$ possiamo definire flusso $F$ come la quantità di risorse utilizzate dalla popolazione nell'unità di tempo:

$$F = \frac{dX_u}{dT} = \frac{d\left(X_{\max} - X\right)}{dT} = -\frac{dX}{dT} = Y$$

cioè: $F = Y$ . Quindi la (3) ha la seguente importante proprietà:

*«Il flusso delle risorse utilizzate e l'evoluzione demografica di una popolazione biologica sono rappresentate da due hubbertiane uguali a meno una costante moltiplicativa».*

## *Riferimenti Bibliografici*

[1] Slotine, J.-J. E. Weiping Li - Applied nonlinear control – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632

[2] Murray J.D. : Mathematical Biology I: An Introduction, Springer Verlag 2002

[3] Comincioli V - Problemi e modelli matematici nelle scienze applicate, Ed. Ambrosiana 1993

## *Sitografia*

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equation

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function

[6] http://it.wikipedia.org/wiki/Curva_di_Hubbert

[7] http://sites.google.com/site/pianetagalileo/