

## SUL CALCOLO DELLA RADICE ENNESIMA E SUL RECIPROCO DELLA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO

In un articolo comparso recentemente su questo Sito [1] veniva esposto come calcolare tutte le radici sia reali che complesse di una equazione algebrica di qualsiasi grado e avente coefficienti reali.

Un tipo particolare di equazioni di grado  $n$  è quello che si presenta sotto la seguente forma:

$x^n - a = 0$  per cui risolvendola con l'algoritmo summenzionato si possono calcolare tutte le sue  $n$  radici sia reali che complesse.

Riguardo poi il tipo di valori ottenuti per tale equazione si rileva quanto segue:

- per un  $n$  **pari** si hanno **2** radici reali di valore opposto e  $n - 2$  radici che risultano complesse e coniugate a coppie ;
- per un  $n$  **dispari** si ha una sola radice reale ed  $n - 1$  radici complesse coniugate a coppie

Per trovare il valore algebrico della radice reale di questo tipo di equazione, che risulta essere evidentemente la radice ennesima di  $a$ , cioè  $\sqrt[n]{a}$ , non è tuttavia necessario utilizzare l'algoritmo generale summenzionato, ma è sufficiente prendere in esame l'algoritmo di Newton relativo al calcolo delle radici reali.

Pertanto considerando la funzione  $f(x) = x^n - a$ , partendo dalla generica formula iterativa riguardante questo algoritmo, cioè:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \dots\dots\dots$$

per la quale si ha:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sqrt[n]{a}$  per  $k \rightarrow \infty$  dove  $f'(x)$  è la derivata di  $f(x)$ ,

si può ottenere con una convergenza di tipo quadratico, il valore numerico di  $\sqrt[n]{a}$  reale positiva .

Affinché poi si abbia convergenza verso la  $\sqrt[n]{a}$  con un numero limitato di iterazioni risulta opportuno scegliere il valore iniziale  $x_k = x_0$  di valore superiore al valore di  $a$  e possibilmente dello stesso ordine di grandezza di  $\sqrt[n]{a}$  .

Poiché per questa equazione si ha  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  la formula iterativa dopo opportuni e semplici passaggi diventa [2]:

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left[ (n-1) \cdot x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right] \quad \text{che, per } n=2 \text{ cioè per il calcolo di } \sqrt{a} \text{ assume la nota formula } x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

Un semplicissimo programma di tipo didattico espresso in linguaggio Qbasic viene qui di seguito presentato e proposto:

```
CLS : PRINT "----- CALCOLO DELLA RADICE ennesima DI UN NUMERO -----"
'DEFDBL A-Z
INPUT "introdurre il numero di cui si cerca la radice ennesima: ",a
INPUT "quale valore di radice vuoi "; n
If a < 1 then xo = 1: goto icso
b = INT(a): s$ = STR$(b): lc = len(s$)-1: 'PRINT lc
c = lc / n :if c <> INT(c) then c = INT(c)+1: 'PRINT c
xo=1 : for k = 1 to c: xo=xo*10 : NEXT k
icso: x=xo : PRINT "xo="; x
m = n - 1
DO
  y = x: d = 1
  FOR k = 1 TO m: d = d * y: NEXT k
  x = (m * y + a / d) / n
LOOP WHILE x<y
PRINT x
```

Nel programma sono state introdotte le opportune istruzioni atte a contemplare per il valore iniziale  $x_0$  le condizioni sopra enunciate.

Se si volessero ottenere i valori della radice in doppia precisione, vale a dire con la presentazione di 16 cifre decimali anziché di 8, per i risultati basterebbe togliere il simbolo ' dall'inizio della seconda riga.

Dato il semplice e corto listato esposto in linguaggio Qbasic, non risulta difficile trasformarlo in un listato relativo ad un qualsiasi altro linguaggio evoluto.

Risulta poi interessante sempre tramite l'algoritmo di Newton ricercare il reciproco della radice di un numero  $a$ , cioè del valore di  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ . Per il calcolo di tale reciproco si prende in questo caso in considerazione la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$

da cui si ricava  $f'(x) = -2x^{-3}$ . Ponendo queste due funzioni nella ben nota formula iterativa dell'algoritmo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{con } k=0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{si ha che } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

La suddetta formula iterativa dopo opportuni e semplici passaggi diventa [2]:

$$x_{k+1} = 0.5 \cdot x_k \cdot (3 - a \cdot x_k^2) \quad (1)$$

Si noti che nella formula (1) non compare nessuna operazione di divisione. Anche per il calcolo di  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  si può realizzare sempre in Qbasic un semplice programma tenendo presente pure qui che il valore iniziale  $x_0$  da dare a  $x$  deve essere un opportuno valore scelto vicino al valore di  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  o per lo meno dello stesso ordine di grandezza.

Viene riportato qui di seguito il listato sempre in Qbasic del programma relativo al calcolo di  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ .

Si fa presente che una volta calcolato tale valore, è sufficiente moltiplicarlo per il numero  $a$  stesso per trovare  $\sqrt{a}$ .

```
CLS : DEFDBL A-Z
PRINT "CALCOLO DELLA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO a E DEL SUO RECIPROCO ";
PRINT "utilizzando la seguente formula iterativa:"
PRINT "          x(k+1)= 0.5 * x(k)*(3 - a * x(k)^2)"
PRINT "dove quale valore iniziale di x viene preso un opportuno valore xo "
PRINT "vicino o almeno dello stesso ordine di grandezza del valore a^(-1/2)."

```

Una considerazione importante riguardo l'utilizzo di quest'ultimo algoritmo è la seguente: la formula iterativa (1) non presenta nessuna operazione di divisione diversamente dalla più nota formula anch'essa iterativa riportata a pag.1 per il calcolo di  $\sqrt{a}$ ; questo l'algoritmo risulta pertanto molto conveniente quando si deve lavorare con grandi numeri e quindi utilizzare una aritmetica a precisione multipla, dove l'operazione della divisione diventa molto onerosa, più complicata e con tempi di esecuzione molto più lunghi rispetto alle altre tre operazioni aritmetiche di addizione, sottrazione e moltiplicazione.

- [1] LA RISOLUZIONE DI EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO ELEVATO: vedi la sezione Approfondimenti /Idee interessanti del sito Internet <http://www.matematicamente.it/>  
 [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Methods\\_of\\_computing\\_square\\_roots](http://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots)