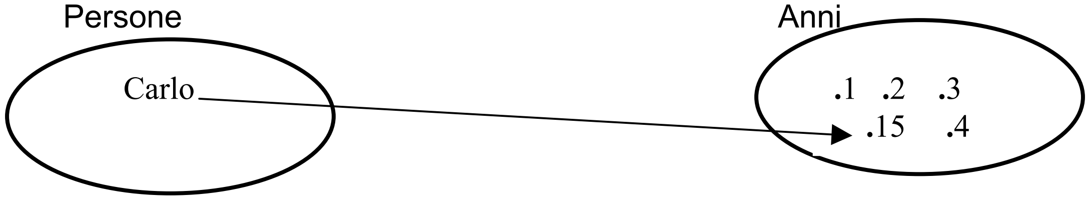
RELAZIONI E PROPRIETA'[1]

[1] Carmine De Fusco – Venaria Reale – cadefu@libero.it

R E L A Z I O N I

GENERALITA'

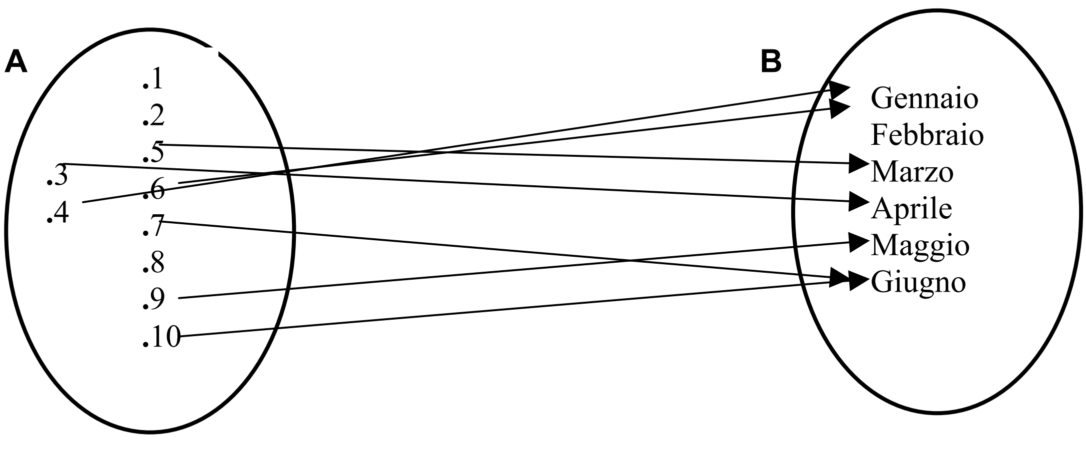
Nel linguaggio comune **mettere in relazione** vuol dire **effettuare un legame**, **mettere in corrispondenza**, quindi indica la presenza di una legge che lega qualcosa a qual cos'altro.
Consideriamo l'esempio :
"Carlo ha 15 anni";
In questo caso la relazione è un legame tra una persona e un numero , ove il numero indica l'età.
Con i diagrammi di Venn possiamo rappresentare l'insieme delle persone e l'insieme dei numeri che indicano l'età delle persone :



" .... ha .... anni "

La freccia indica **la relazione** ".............. ha .... anni " dove la frase "Carlo ha 15 anni ", che è una proposizione vera, è diventata **un predicato a due posti** .
Riempiendo questi posti vuoti otteniamo delle coppie ordinate di elementi che rendono il predicato una proposizione vera oppure una proposizione falsa.
Il predicato dimostra di essere una fabbrica di insiemi e in esso non possiamo mettere prima 15 e poi Carlo perché le coppie devono essere ordinate
Il primo insieme è detto **dominio** della relazione, il secondo insieme è detto **codominio**. Nel dominio prendiamo sempre il primo elemento della coppia ordinata, nel codominio prendiamo il secondo elemento.

Consideriamo un insieme A costituito da 10 alunni (indicati con i numeri da 1 a 10) e un insieme B costituito dai primi sei mesi dell'anno.
Fra i due insiemi possiamo stabilire una relazione, ad esempio la relazione: " **...... è nato nel mese di ......** " :



La relazione si può rappresentare mediante le frecce che uniscono ciascun alunno al proprio mese di nascita. Dalla rappresentazione grafica si vede chiaramente che qualche alunno non è nato in alcuno dei mesi considerati e che in qualche mese (febbraio) non è nato alcuno dei ragazzi considerati.

Il fatto che di frecce ce ne sia una o che ce ne siano tante o nessuna , dipende dal tipo di relazione.
La parola "relazione" è sempre legata alle coppie ma non necessariamente ad una frase vera o falsa.
Consideriamo l'insieme **I =** $\{$ **1 , 2 , 3** $\}$ e l'insieme **I_1 =** $\{$ **a , b** $\}$.
Tutte le possibili coppie, quindi tutte le possibili relazioni , possono essere rappresentate dal **prodotto cartesiano I x I_1.**

b	1b	2b	3b
a	1a	2a	3a
	1	2	3

Se prendiamo alcune delle possibili coppie abbiamo stabilito una relazione:
R = $\{$ **(1b), (2b), (2a)** $\}$ **.**
Se le coppie le prendiamo a caso oppure se le frecce sul diagramma di Venn le mettiamo a caso , sarà difficile che la relazione abbia delle proprietà.

Si vede chiaramente che, quando si stabilisce una relazione qualsiasi tra due insiemi, essa ci dà sempre un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano fra i due insiemi. Possiamo quindi dare la seguente definizione :

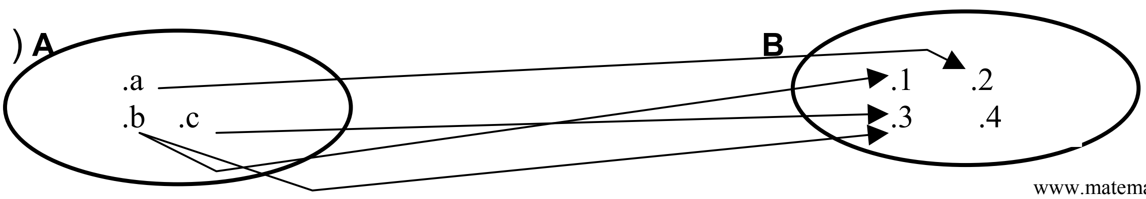
Tra due insiemi A e B esiste una relazione quando si ha un sottoinsieme **R** $\subseteq$ **(A x B).**
A è il dominio della relazione e B è il codominio.

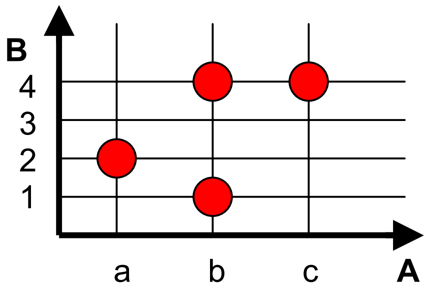
Affinché esista una relazione occorrono: un insieme A, un insieme B e un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano A x B.

RELAZIONI PARTICOLARI TRA INSIEMI

Data una relazione tra un insieme A e un insieme B abbiamo notato che:
a) un elemento x di A può avere una, nessuna o più immagini in B;
b) un elemento y di B può avere una, nessuna o più controimmagini in A.
In base alla esistenza ed al numero delle immagini e delle controimmagini possiamo individuare alcuni tipi particolari di relazioni.

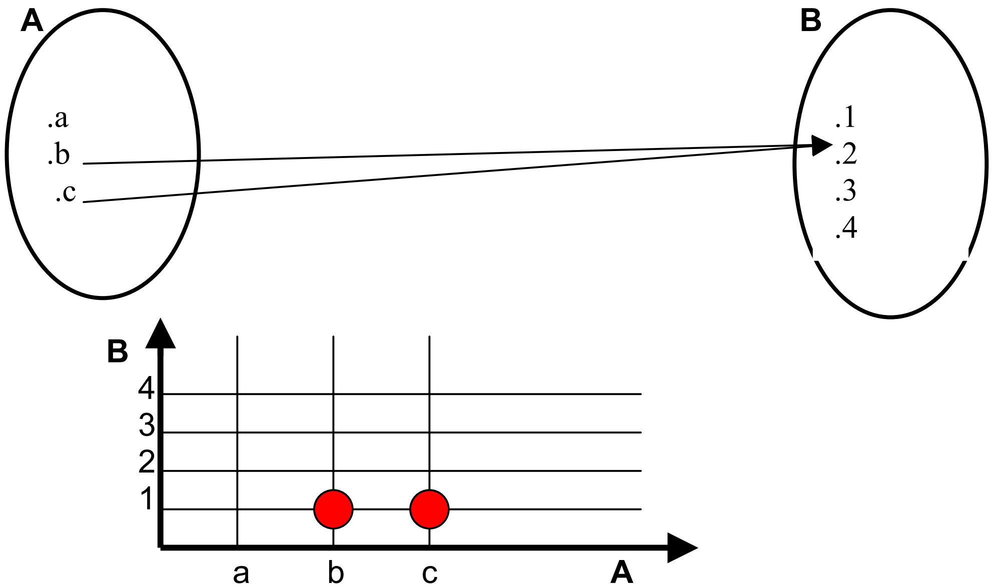
Consideriamo gli insiemi :
A = $\{$**a , b , c**$\}$ e **B =** $\{$**1 , 2 , 3 , 4**$\}$
e le relazioni **R_I** , **R_{II}** , **R_{III}** , **R_{IV}** con i relativi diagrammi a frecce e le relative rappresentazioni cartesiane.

R_I)




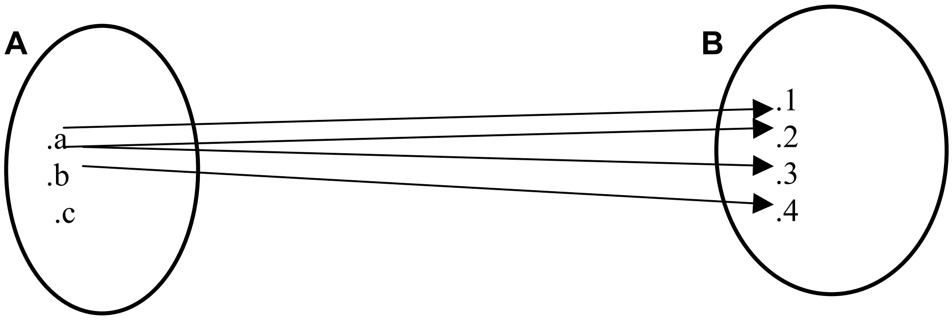
In questa relazione ogni elemento del dominio A ha almeno un'immagine nel codominio B, quindi da ogni elemento del dominio parte almeno una freccia.
Su ogni semiretta uscente da un elemento di A c'è almeno un punto dell'insieme
R_I = {(a, 2), (b, 1), (c, 3), (b, 3)} $\subset$ (A x B).
Una relazione di questo tipo, cioè tale che ogni elemento del dominio ha almeno un'immagine nel codominio, si dice **ovunque definita**.

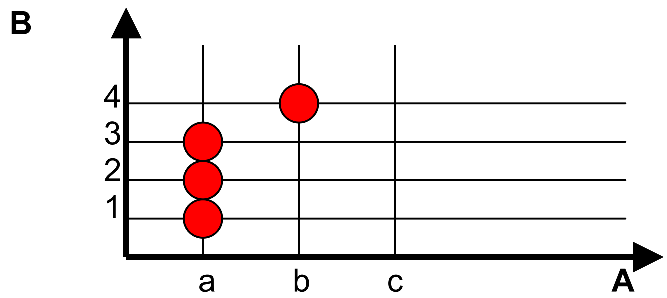
R_{II})



Ogni elemento del dominio A ha **al più** (al massimo) un'immagine in B, quindi da ogni elemento del dominio parte al più una freccia.
Su ogni semiretta uscente da un elemento di A c'è al più un punto dell'insieme
R_{II} = {(c, 2), (b, 2) } $\subset$ (A x B).
Una relazione di questo tipo, cioè tale che ogni elemento del dominio ha al più un'immagine, si dice **funzionale** o semplicemente **funzione**.

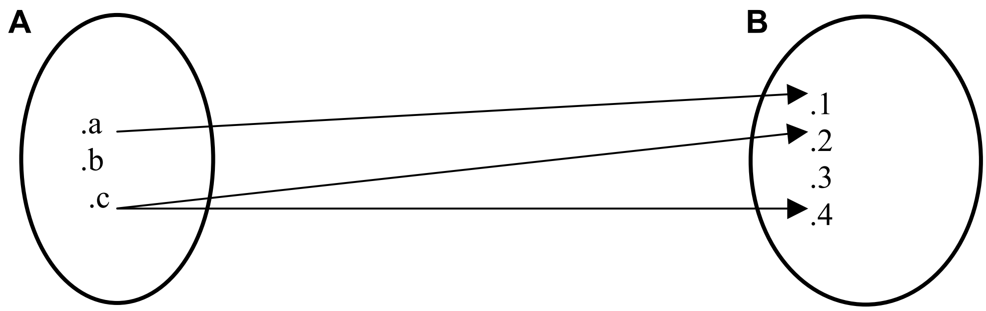
R_{III})

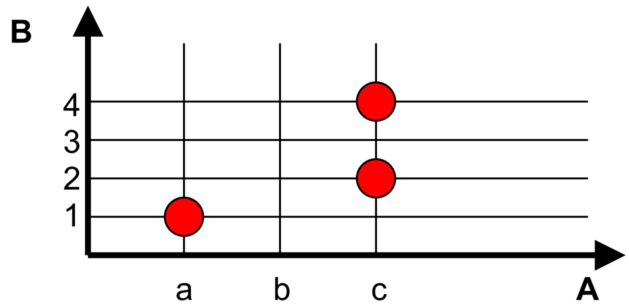




Ogni elemento del codominio B ha almeno una controimmagine nel dominio A, quindi ad ogni elemento del codominio arriva almeno una freccia.
Su ogni semiretta uscente da un elemento di B c'è almeno un punto dell'insieme
$\mathbf{R_{III} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 4)\} \subset (A \times B)}$ **.**
Una relazione di questo tipo, cioè tale che ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine, si dice **suriettiva**.

$\mathbf{R_{IV}}$)





Ogni elemento del codominio B ha al più una controimmagine in A , quindi ad ogni elemento del codominio arriva al più una freccia.
Su ogni semiretta uscente da un elemento di B c'è al più un punto dell' insieme
$\mathbf{R_{IV} = \{(a, 1), (c, 2), (c, 4)\} \subset (A \times B)}$ **.**
Una relazione di questo tipo, cioè tale che ogni elemento del codominio ha al più una controimmagine, si dice **iniettiva.**

Questi quattro tipi di relazioni, pur operando tra gli stessi insiemi A e B, sono diverse e godono di proprietà diverse.

Oltre ai diversi tipi di relazioni, abbiamo visto diversi modi per rappresentarle:

1) Dando un predicato a due argomenti, cioè con due posti vuoti;

es. a) il fiume ...... bagna ...... ;
b) il numero ...... è doppio di ...... ;
c) ...... è padre di ...... ; (relazione di parentela)

2) Descrivendo la relazione come insieme di coppie che rendono il predicato vero;

es. a) (Po, Torino), (Tevere, Roma), ... ;
b) (24, 12), (10, 5), ... ;
c) (Antonio, Gianni), (Raffaele, Giulio), ... ;

3) Usando i diagrammi di Venn e le frecce (diagrammi a frecce);

4) Dandone la rappresentazione cartesiana: prodotto cartesiano e tabelle a doppia entrata.

RELAZIONI TRA NUMERI (N)

Consideriamo l'insieme N dei numeri naturali e l'insieme delle ultime cifre di tutti i numeri naturali (in pratica l'insieme delle cifre che compongono i numeri naturali):

Dominio	**Codominio**
N	**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

Possiamo stabilire una relazione o corrispondenza tra i numeri naturali e la loro ultima cifra.
Questo tipo di relazione è una **funzione** perché **ogni numero naturale ha una ed una sola ultima cifra, quindi è una relazione ovunque definita e funzionale** ma è anche una relazione **suriettiva** perché ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine nel dominio N.

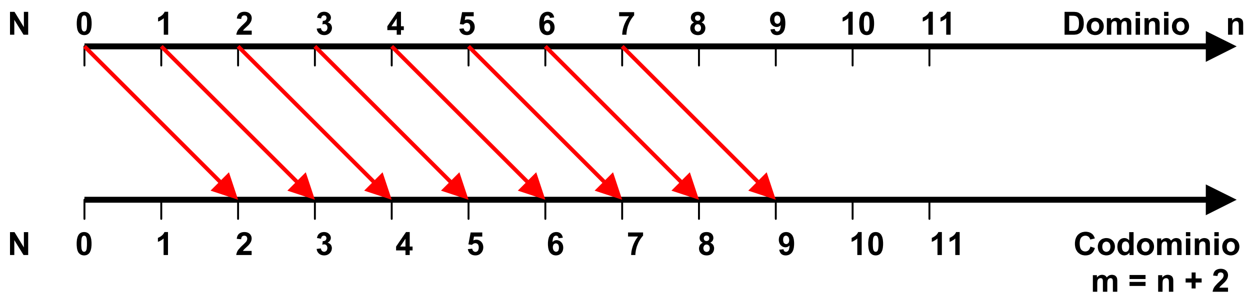
Consideriamo ora la relazione in N che associa ad ogni numero pari il suo successivo pari e ad ogni numero dispari il suo successivo dispari.

Dominio	**Codominio**
N	**N**
0	2
1	3
2	4
3	5
.....	.....

Abbiamo fatto in modo che l'incremento fosse costante (+2), e la legge generale (o predicato) di questa relazione è: **n + 2 = m.**
E' un predicato perché **n** e **m** possono assumere qualsiasi valore, in pratica è come avere: **" ...... + 2 = ...".**
E' una funzione perché ogni elemento del dominio ha una ed una sola immagine, ma ci sono due numeri del codominio (0 e 1) ai quali non arriva alcuna freccia cioè non hanno alcuna controimmagine.

Funzioni di questo tipo si chiamano **"macchine"**. In questo caso abbiamo **"macchina +2"**, quindi dando input "n", otteniamo output "n +2".

Usando un diagramma a frecce:

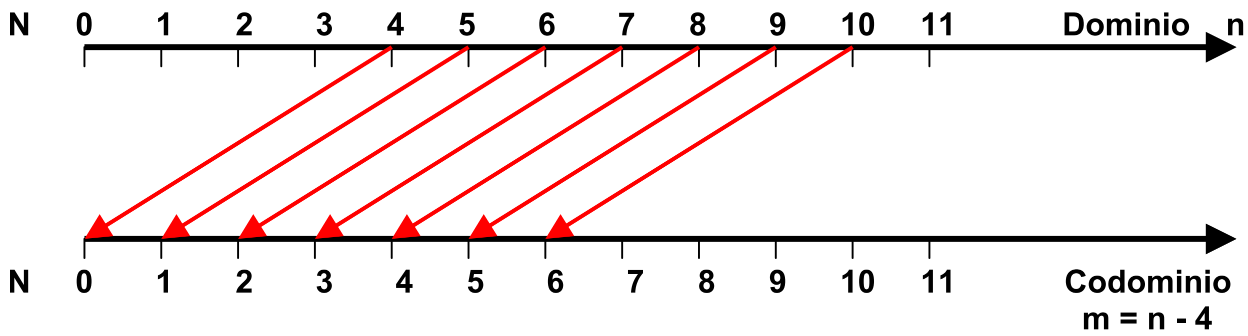


Se il predicato ha un solo posto vuoto, cioè l'incognita è una sola, abbiamo :

a) x + 3 = 12 b) 18 + 5 = x
c) .... ecc.

che sono delle equazioni elementari. Se ci sono elementi nei quali non arriva alcuna freccia (nel caso precedente 0 e 1), vuol dire che l'equazione non è risolvibile in N per quei valori.

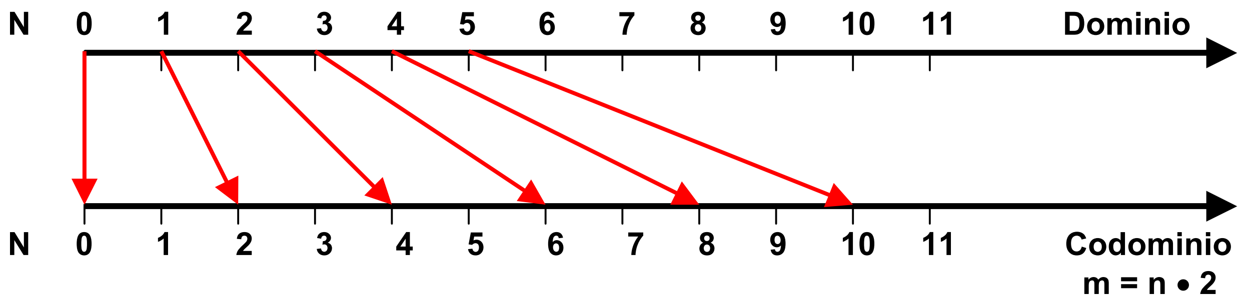
Se consideriamo la **"macchina - 4"** (schema in basso), abbiamo il predicato: **n - 4 = m** che non è una funzione, infatti non tutti gli elementi del dominio hanno una immagine nel codominio.



La macchina più conosciuta è la **"macchina + 1"** che è la macchina di **Peano** che ci permette di costruire la successione dei numeri naturali. **E' una funzione e la sua legge è: $n = n + 1$.**

Consideriamo ora la funzione **$n = n + 0$**. Essa è una corrispondenza biunivoca che prende il nome di **identità**, infatti ad ogni numero naturale "n" associa lo stesso numero "n" e viceversa.

Altre macchine particolari sono quelle che presentano delle moltiplicazioni, ad esempio:
$m = n \bullet 2$, che è una funzione iniettiva. Le funzioni di questo tipo sono un modo per costruire **i multipli di un numero**:
$m = n \bullet 3$
$m = n \bullet 4$
ecc.



Possiamo anche considerare macchine con divisioni, ad esempio **$n = n / 2$** , ma in questo caso se vogliamo rimanere in N dobbiamo prendere solo i numeri pari.

Una funzione molto particolare è la relazione **$m = n \bullet 0$** che è una **funzione costante** che associa ad ogni elemento del dominio N sempre e solo lo zero nel codominio.

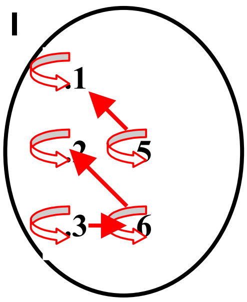
PROPRIETA' DELLE RELAZIONI IN UN INSIEME

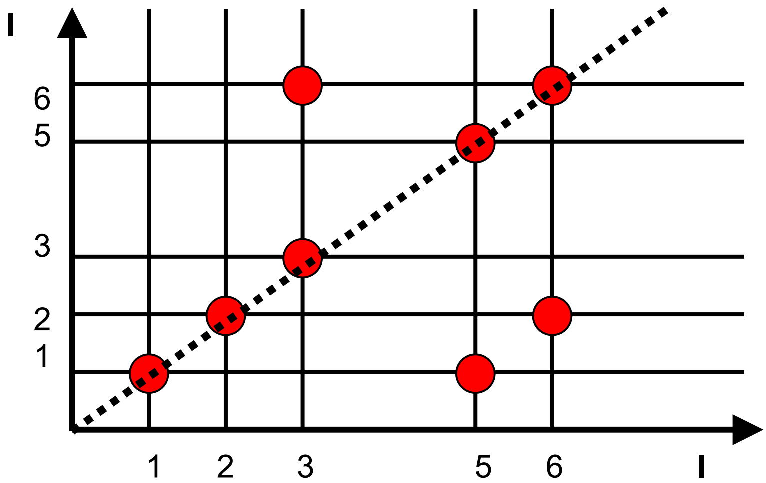
Un esempio tipico di relazioni all'interno di un certo insieme sono le relazioni di parentela in un paese o in una borgata.

Per avere una relazione occorre avere un predicato a due posti, del tipo:
" ...... è padre di ...... " ;
Per rendere vera la relazione dobbiamo scegliere, tra tutte le possibili coppie di nomi di abitanti della borgata, quelle opportune.
Quando si lavora con una relazione in un insieme, siamo nell'ottica del confronto degli elementi dell'insieme .

Per poter definire le principali proprietà di cui può godere una relazione, consideriamo l'insieme **I =** $\{$**1, 2, 3, 5, 6** $\}$ e le relazioni che seguono.

Sia $\mathbf{R_I}$ la relazione rappresentata dalle coppie dell'insieme $\mathbf{I_2}$ **=** $\{$**(1, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5), (6, 6), (5, 1), (3, 6), (6, 2)**$\}$.
Rappresentiamo **RI** con il diagramma a frecce e con il reticolo cartesiano.





Dalle coppie formate da elementi uguali, si nota che **ogni elemento di I è in relazione con se stesso.**
Nel diagramma a frecce questo è evidenziato da una freccia che lega ogni elemento con se stesso.
Nel reticolo cartesiano notiamo che tutti i punti della **diagonale** di **I x I** appartengono all'insieme $\mathbf{I_2}$.
Una relazione di questo tipo, cioè tale che ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso, si dice che ha la **proprietà riflessiva** oppure che è una relazione riflessiva e si indica in questo modo:

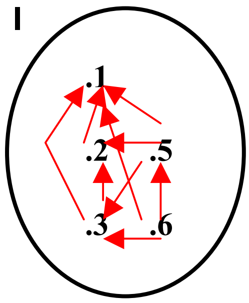
x R x, per ogni x $\in$ **I (x è in relazione con x , per ogni x che appartiene all'insieme I).**

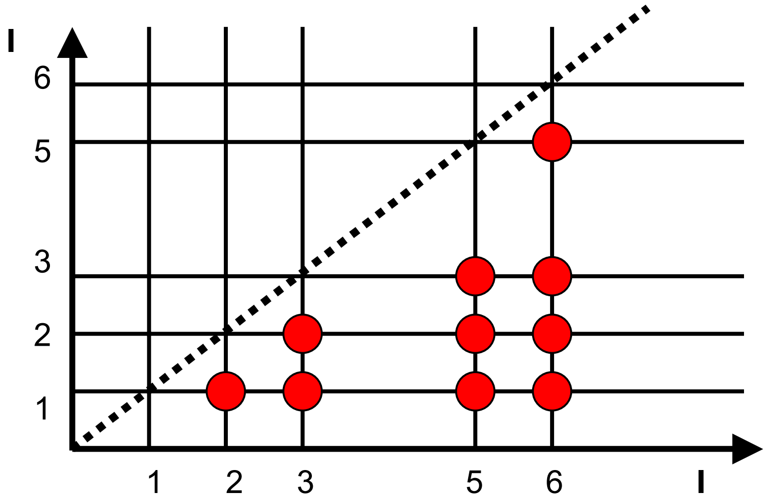
Una relazione in un insieme, invece, non ammette la proprietà riflessiva se e soltanto se almeno un elemento dell'insieme non è in relazione con se stesso.

[1] Carmine De Fusco – Venaria Reale – cadefu@libero.it

Sia $\mathbf{R_{II}}$ la relazione rappresentata dalle coppie dell'insieme $\mathbf{I_3}$ **=** $\{$**(2, 1), (3, 1), (3, 2),**

(5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 5), (6, 2), (6, 1), (6, 3) } .
Rappresentiamo $\mathbf{R_{II}}$ con il diagramma a frecce e con il reticolo cartesiano.

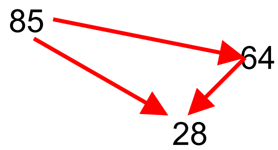




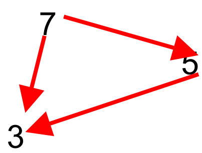
Notiamo che se un elemento a di I è in relazione con un elemento b di I e b è in relazione con un elemento c di I , allora a è in relazione con c.
Nel diagramma a frecce questo è evidenziato ad esempio dalla freccia che lega l'elemento 6 con l'elemento 5, il 5 con l'1 e infine 6 con 1 .
Nel reticolo cartesiano si nota che sono stati presi tutti i punti si trovano al disotto della diagonale principale (ma invertendo tutte le coppie di elementi, cioè tutte le frecce, i punti sarebbero tutti al disopra).
Una relazione di questo tipo si dice che ha la **proprietà transitiva** oppure che è una relazione transitiva e si indica così:

a R b e b R c $\Rightarrow$ **a R c (se un elemento a è in relazione con un elemento b,** e **b è in relazione con un elemento c, allora a è in relazione con c.**
Una relazione in un insieme, invece, non gode della proprietà transitiva se e solo se nell'insieme esiste almeno una terna di elementi distinti per cui il 1° è in relazione con il 2° e il 2° con il 3°, mentre il 1° non è in relazione con il 3°.

Esempi sulla proprietà transitiva in un insieme:
a) Consideriamo la relazione **" ...... ha lo stesso numero di cifre di ...... "** e le proposizioni:
1) 85 ha lo stesso numero di cifre di 64;
2) 64 ha lo stesso numero di cifre di 28.
Per poter affermare che questa relazione nell'insieme **A = { 85, 64, 28 }** è transitiva, dobbiamo poter chiudere il diagramma con una terza freccia che collega il 1° e il 3° numero.

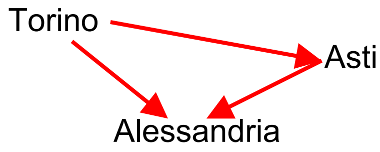


b) Consideriamo la relazione **"...... è maggiore di ......"** e le proposizioni:
a) 7 è maggiore di 5;
b) 5 è maggiore di 3.
Nell'insieme **B = {7, 5, 3 }**, questa relazione, come la precedente, gode della proprietà transitiva.

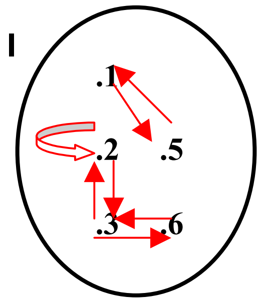


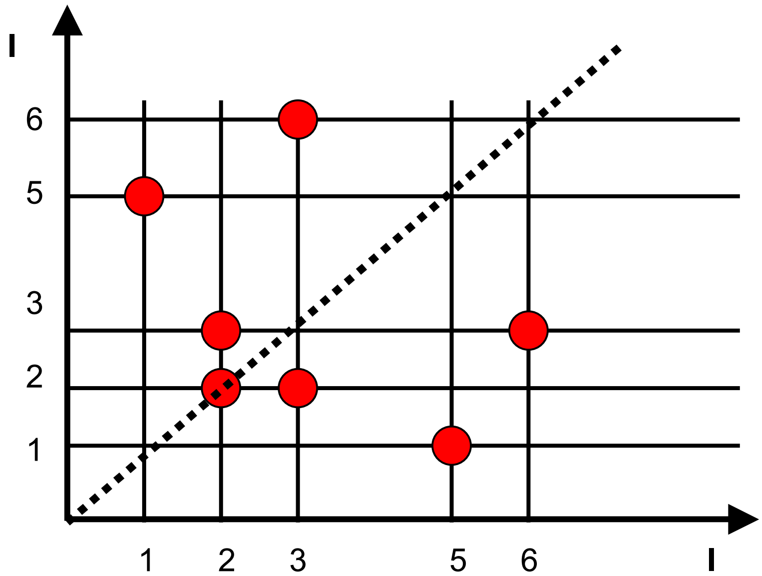
c) Consideriamo l'insieme **C = {Torino, Asti,**

Alessandria } e la relazione **" ...... è collegato a ...... ".**



Consideriamo ora la relazione **R_{III}** , individuata dall'insieme **I_4 = {(1, 5), (2, 3), (5,1), (3, 2), (2, 2), (3, 6), (6, 3) } .**
Costruiamo il diagramma a frecce e il reticolo cartesiano.

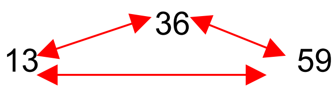




Nel diagramma a frecce notiamo che quando un elemento è legato ad un altro con una freccia, quest'ultimo è legato al primo con una freccia di ritorno.
Nel reticolo cartesiano si nota che tutti i punti della relazione **R_{III}** sono **simmetrici** rispetto alla **diagonale principale**.
Una relazione di questo tipo, cioè tale che se un elemento x è in relazione con un elemento y, allora y è in relazione con x, si dice che ha la **proprietà simmetrica** oppure che è simmetrica e si indica così :

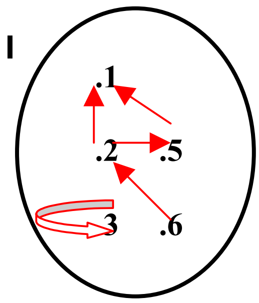
per ogni (x , y) $\in$ I , se x R y $\Rightarrow$ y R x .

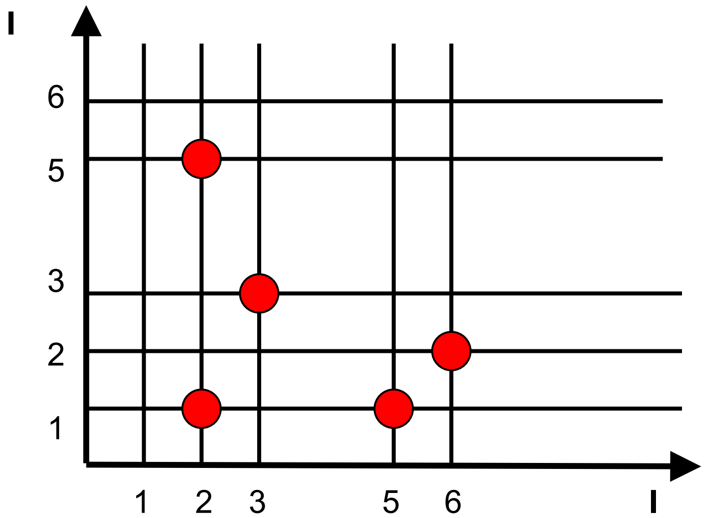
Una relazione in un insieme, invece, non è simmetrica se esiste almeno una coppia di elementi dell'insieme tali che il 1° è in relazione con il 2°, ma il 2° non è in relazione con il 1°.
Esempi :
a) La relazione ,già considerata , **" ...... ha lo stesso numero di cifre di ...... "** gode della proprietà simmetrica in un insieme. Infatti se x ha lo stesso numero di cifre di y in un insieme, è anche vero che y ha lo stesso numero di cifre di x , quindi in un diagramma esiste anche la freccia inversa.



b) Se una relazione è simmetrica, questa proprietà ci consente di cambiare la frase senza che cambi il suo significato. Ad esempio:
1)Se una retta r è parallela ad un'altra retta s (**r // s**), posso anche dire che r ed s sono parallele tra loro, oppure che s è parallela ad r .
2)Se Mario è fratello di Aldo, possiamo anche dire che Mario e Aldo sono fratelli.
3)La relazione " x è padre di y " , invece chiaramente non è simmetrica .

Sempre nell'insieme **I**, consideriamo la relazione $\mathbf{R_{IV}}$, rappresentata dall'insieme
$\mathbf{I_5} = \{(3, 3), (2, 5), (6, 2), (2, 1), (5, 1)\}$ e dai diagrammi seguenti :



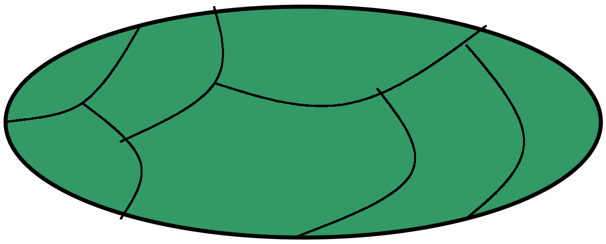


Nel diagramma a frecce notiamo che, per due elementi distinti, se l'elemento 2 è legato all'elemento 5 da una freccia, 5 non è legato a 2 da alcuna freccia; se l'elemento 6 è legato all'elemento 2 da una freccia, 2 non è legato 6 da alcuna freccia ecc. .
Nel reticolo cartesiano, notiamo che non appartengono alla relazione $\mathbf{R_{IV}}$ punti simmetrici rispetto alla diagonale principale (a meno che non siano sulla diagonale stessa).
Possiamo concludere quindi che per due elementi distinti x e y di un insieme I , se x è in relazione con y , allora y non è in relazione con x .
In simboli : Dati $\mathbf{x \neq y}$ **, per ogni** $\mathbf{x}$ **e** $\mathbf{y \in I}$ **,** $\mathbf{x\ R\ y \Rightarrow y \not{R}\ x}$ **.**
Una relazione di questo tipo si dice che gode della **proprietà antisimmetrica** oppure che è antisimmetrica.
Una relazione in un insieme non è antisimmetrica se e solo se esiste almeno una coppia di elementi distinti per cui il 1° è in relazione con il 2° e il 2° è in relazione con il 1° .

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Consideriamo l'insieme delle piante di un certo ambiente. I botanici hanno stabilito dei criteri che ci consentono di affermare se due piante sono della stessa specie. Con il predicato a due posti **" ...... è della stessa specie di ...... "** e considerando i criteri, riusciamo ad effettuare una divisione (**partizione**) dell'insieme **P** delle piante di quell'ambiente in vari sottoinsiemi, ciascuno con le piante di una stessa specie .

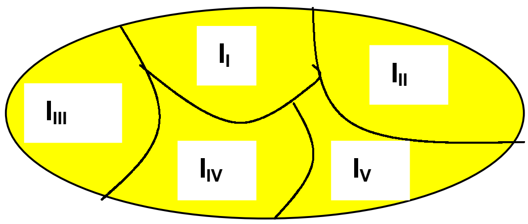
P



Consideriamo ora l'insieme **N** dei numeri naturali e formiamo in esso una partizione in questo modo :

N

$\mathbf{I_I} = \{ \mathbf{0, 5, 10, 15, 20, ...} \}$
$\mathbf{I_{II}} = \{ \mathbf{1, 6, 11, 16, 21, ...} \}$
$\mathbf{I_{III}} = \{ \mathbf{2, 7, 12, 17, 22, ...} \}$
$\mathbf{I_{IV}} = \{ \mathbf{3, 8, 13, 18, 23, ...} \}$
$\mathbf{I_V} = \{ \mathbf{4, 9, 14, 19, 24, ...} \}$



Quale criterio abbiamo seguito per eseguire la partizione ?

Problemi di questo tipo sono importanti proprio perché da **una situazione**, in questo caso una partizione dell'insieme N, ci consentono di trovare **il criterio che l'ha determinata**.
In quest'esempio, nel primo sottoinsieme abbiamo messo i numeri che divisi per 5 danno resto 0, nel secondo i numeri che sempre divisi per 5 danno resto 1, nel terzo quelli che danno resto 2, nel quarto quelli che danno resto 3, nel quinto infine quelli che danno resto 4.
Questi sono due esempi di **relazioni di equivalenza**, nel cui predicato a due posti o relazione in genere compare la parola **"stesso"** ("stessa specie", "stesso resto").
Queste relazioni godono della proprietà transitiva, infatti se lo 0 è nella stessa **classe** (o sottoinsieme) del 10 e il 10 è nella stessa classe del 20, possiamo dire che lo 0 è nella stessa classe del 20 .
Esse godono della proprietà simmetrica, infatti se lo 0 è nella stessa classe del 10, allora il 10 è nella stessa classe dello 0 .
Infine godono della proprietà riflessiva perché ogni elemento è nella propria classe essendo in relazione con se stesso .

Generalizzando, se indichiamo con R il predicato a due posti che esprime la relazione, avremo:

se x R y e y R z, allora x R z **(proprietà transitiva)**
se x R y, allora y R x **(proprietà simmetrica)**
per ogni x, x R x **(proprietà riflessiva).**

Quindi :
Si dice relazione di equivalenza una relazione in un insieme I che gode delle proprietà riflessiva, transitiva, simmetrica.

Esercizio
Dimostra che nell'insieme **N** le relazioni:
a) x R_I y , dove R_I = " ..... ha lo stesso numero di cifre di ...... ";
b) a R_{II} b , dove R_{II} = " .....ha la stessa ultima cifra di ...... " ;
sono entrambe relazioni di equivalenza.

LE CLASSIFICAZIONI

Cosa significa classificare? Sul dizionario di lingua italiana troviamo il significato di **"ordinare per classi"**. Ad esempio, in una biblioteca classificare dei libri significa scegliere un criterio e ordinarli secondo quel criterio: spesso vengono ordinati per argomento oppure secondo l'ordine alfabetico del cognome degli autori ecc..

La classificazione forse più famosa, in ambito scientifico, è stata quella del naturalista svedese **Carlo Linneo** che, alla metà del XVIII secolo, in botanica e in zoologia elaborò un sistema di classificazione basato sulla specie, abbandonando i nomi comuni di piante e animali e sostituendoli con nomi scientifici, poi universalmente riconosciuti, formati da due nomi latini che indicano rispettivamente il genere e la specie (nomenclatura binomia). In tal modo tutti gli animali e le piante conosciute vennero suddivisi in gruppi (classi) in base ad alcune caratteristiche: quelle della specie.
Anche in matematica quando si opera una classificazione si effettua un **"confronto".**
Consideriamo ad esempio l'insieme **A** formato dai blocchi logici (48 pezzi suddivisi per colore, forma, spessore e grandezza) e la relazione **R_I = "essere dello stesso colore".**
Istintivamente prendiamo uno per uno tutti i pezzi e facciamo tre "mucchi" con elementi dello stesso colore: $A / R_I = \{$giallo, rosso, azzurro$\}$.
Se invece consideriamo la relazione **R_{II} = "essere della stessa forma"**, i gruppi di elementi che si ottengono sono quattro: $A / R_{II} = \{$cerchio, rettangolo, quadrato, triangolo$\}$.

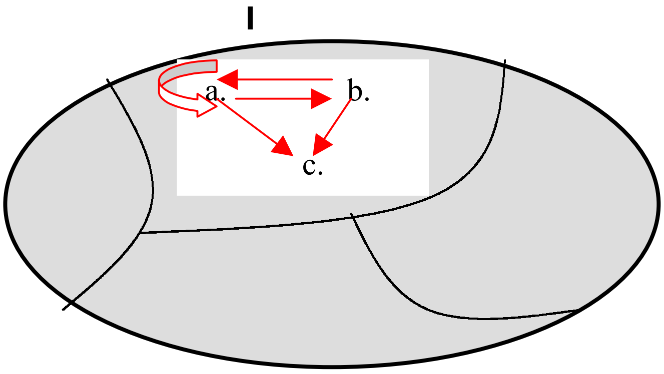
Quando classifichiamo quindi <u>costruiamo degli insiemi</u>. Possiamo classificare delle carte da gioco per seme, un ammasso di banconote in base al taglio, le persone per età (in pratica è quello che avviene per iscrivere i bambini a scuola), ecc. .
Uno stesso insieme **I**, in base al tipo di relazione (caratteristica) che viene scelta, può essere classificato in molti modi diversi.
Una volta scelta la relazione che ci interessa, effettuiamo la classificazione dividendo l'insieme (partizione) in diversi **sottoinsiemi** detti **classi**. Ogni elemento dell'insieme deve stare in una ed una sola classe. Affinché questo accada occorre che la relazione considerata per la classificazione goda delle proprietà: a) riflessiva, b) simmetrica, c) transitiva.

Proprietà riflessiva: dobbiamo poter dire che ogni elemento è rappresentante di se stesso: $a\,R\,a$.

Proprietà simmetrica: se un elemento a è confrontabile con un elemento b allora anche b è confrontabile con a; se $a\,R\,b$ allora $b\,R\,a$.

Proprietà transitiva: se un elemento a è confrontabile con un elemento b che, a sua volta, è confrontabile con un elemento c, allora a è confrontabile con c; se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, allora $a\,R\,c$.
Una relazione che gode di queste tre proprietà è una **relazione di equivalenza**, di conseguenza le classi che si ottengono applicando la relazione si dicono **classi di equivalenza.**

Le classi sono il risultato della classificazione.



Per formare una classe di equivalenza si prende un elemento qualunque dell'insieme, ad esempio l'elemento m e si costruisce l'insieme degli elementi equivalenti ad m in base alla relazione prescelta.
In simboli, se indichiamo la classe con **[m]** , abbiamo :

$$[m] = \{ x / x \in I \text{ e } x R m \} .$$

Tra le diverse classi non esistono relazioni. Quindi una qualsiasi relazione di equivalenza, in un insieme I, permette di classificare gli elementi dell'insieme stesso dividendoli in **sottoinsiemi disgiunti**, all'interno di ciascuno dei quali gli elementi sono in relazione tra loro.
Ogni classe di equivalenza può essere rappresentata da un solo elemento. Quello della **rappresentanza** è un concetto molto conosciuto e sfruttato, ad esempio esistono rappresentanti per lo Stato, i Comuni, i partiti, le scuole, le classi delle scuole, i sindacati, ecc..
Nell'esempio precedente l'elemento **m** si dice rappresentante della [m] (classe m), in tal modo prendendo **m** possiamo dire di aver individuato anche tutti gli altri elementi della sua classe. Naturalmente la [m] può essere rappresentata da un qualunque altro elemento della classe stessa poiché anche quest'altro sarà equivalente ad m .

RELAZIONI D'ORDINE

Le relazioni d'ordine sono relazioni binarie che ci consentono di **"ordinare"** gli elementi di un certo insieme .
Ad esempio se si vogliono mettere in fila un insieme di oggetti in base alla loro lunghezza oppure delle persone in base alla loro statura, la relazione è **R_1 = " x è meno lungo di y "** oppure **" x è meno alto di y "**. In questo caso avremo un **ordine crescente**.
Se invece scegliamo la relazione **R_2 = " x è più lungo di y "** oppure **" x è più alto di y"**, avremo un **ordine decrescente**.
Consideriamo l'insieme **A** degli oggetti e la relazione R_1. In pratica confrontiamo gli oggetti **a due a due** in base alla caratteristica: "lunghezza"; più precisamente il confronto viene effettuato non sugli oggetti in sé ma sulle loro **misure**.
La relazione d'ordine non è una " **seriazione** " perché in quest'ultimo caso occorre l'accorgimento di usare oggetti tutti diversi tra loro; in pratica la seriazione è un'operazione più facile da effettuare .

Una relazione **R** affinché possa definirsi relazione d'ordine occorre che ammetta le proprietà transitiva, antisimmetrica e riflessiva, quindi non è una relazione di equivalenza perché manca la proprietà simmetrica, anzi **le relazioni d'ordine sono legate strettamente ad una asimmetria** (si può andare dal più piccolo al più grande o viceversa).
Un insieme **I** quindi si dice ordinato quando in esso è definita una relazione R d'ordine che ci consenta di confrontare ed ordinare i suoi elementi.

I numeri naturali ad esempio possono essere scritti in forma ordinata:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ..., n , n + 1 , ...

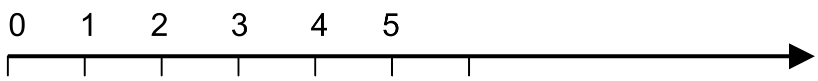
In quest'ordine gli elementi dell'insieme N sono presentati in ordine di grandezza crescente e sono più semplici da comprendere e da rappresentare ma possiamo rappresentarli in vari ordini ad esempio:

a) **0 , 2 , 4 , 6 , ... , 2n , 2n + 2 , ...**

b) **1 , 3 , 5 , 7 , ... , 2n + 1 , 2n + 3 , ...**

Nel caso a) abbiamo rappresentato in ordine crescente i numeri pari mentre nel caso b) abbiamo rappresentato nello stesso ordine i numeri dispari.
Naturalmente non siamo noi che "ordiniamo" oppure che "disponiamo" in un certo ordine i numeri naturali, noi rivolgiamo la nostra attenzione ad una determinata relazione R d'ordine che ci permette di **vedere** la corrispondente disposizione che i numeri già hanno.

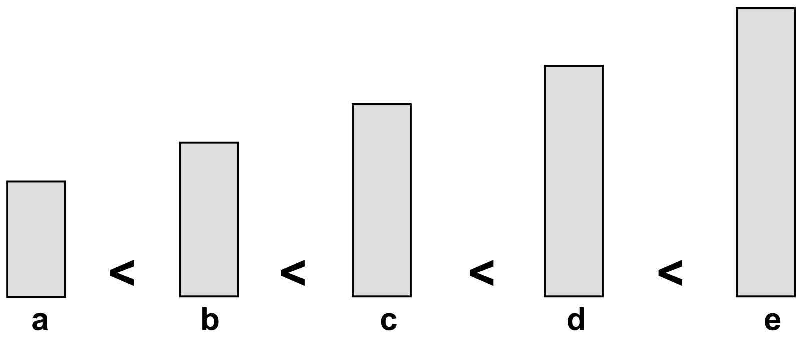
Quando rappresentiamo i numeri naturali sulla retta numerica, l'ordine che ne risulterà, i punti della retta ce l'hanno già, noi non facciamo altro che evidenziarlo.



Rivolgiamo ora la nostra attenzione ai simboli e alle proprietà.

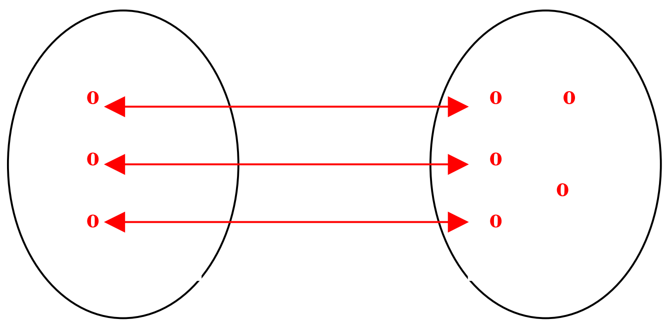
Nella relazione di ordinamento per grandezza si usa il simbolo **"maggiore di"** (**>**) oppure **"minore di"** (**<**).
In questo caso si parla di relazione di ordinamento in senso stretto che gode della proprietà antisimmetrica oltre a quella transitiva mentre manca la proprietà riflessiva.
Infatti, per la proprietà antisimmetrica, dati due elementi a e b dell'insieme, **se a precede b (in simboli a < b) è escluso che b possa precedere a (b < a).**

La seriazione invece corrisponde ad una relazione di ordine stretto solo se nell'insieme considerato abbiamo elementi tutti diversi tra loro.

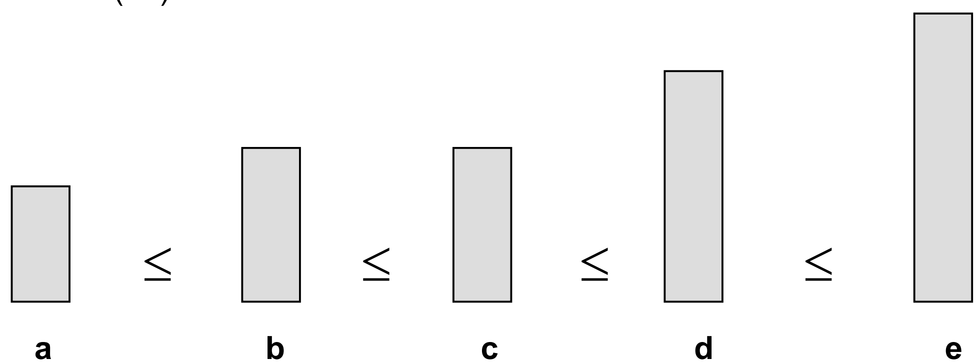


"**Minore di**" significa anche "**è contenuto in**". Consideriamo l'esempio 3 < 5;

3 è minore di 5 perché al 3 possiamo aggiungere 2 per ottenere 5.
3 < 5 perché 3 + 2 = 5.



Le vere relazioni d'ordine (o ordine in senso lato) sono quelle che ammettono tutte e tre le proprietà: riflessiva, transitiva e antisimmetrica.
In questo caso si usano i simboli **"minore o uguale a"** (≤) oppure **"maggiore o uguale a"** (≥).



La relazione d'ordine "minore o uguale a" è riflessiva.
In particolare la relazione in N, $a \leq b$ è verificata se esiste in N un x **tale che** (in simbolo: $|$) $a + x = b$; questo x può essere anche zero e allora si ha che $a = b$.
In simboli: se $a \leq b \quad \exists\, x \in N \mid a + x = b$.

La relazione d'ordine $\leq$ è transitiva infatti:
se $a \leq b \quad \exists\, x \in N \mid a + x = b$
se $b \leq c \quad \exists\, y \in N \mid b + y = c$
Ma se $a + x = b$ allora possiamo dire che $a + x + y = c$, di conseguenza:
$a \leq c$.
Si ha l'uguaglianza $a = c$ se e solo se: $x = y = 0$.

La relazione d'ordine $\leq$ è antisimmetrica.
Se $a \leq b \quad \exists\, x \in N \mid a + x = b$
se $b \leq a \quad \exists\, y \in N \mid b + y = a$
Ma se $a + x = b$ allora possiamo dire che $a + x + y = a$
che è vera solo se $x + y = 0$, cioè se $x = 0$ e $y = 0$.
Di conseguenza avremo che :
$a + 0 = b$ e $b + 0 = a$ da cui $a = b$.
Ogni qualvolta due elementi sono confrontabili in entrambi i modi allora i due elementi sono uguali.

UNA PARTICOLARE RELAZIONE D'ORDINE: LA DIVISIBILITA'

Abbiamo definito la relazione d'ordine mediante l'addizione, cioè abbiamo detto che: in N, dati due numeri a e b, $a \leq b$ se e solo se $\exists\, n \in N$ tale che $a + n = b$.
Vediamo adesso quale relazione si stabilisce tra a e b se consideriamo un $n \in N$ tale che $a \bullet n = b$.
Questa situazione la troviamo negli esempi della seguente tabella:

a	**b**	**a • n = b**
2	6	2 • .... = 6
5	20	5 • .... = 20
7	42	7 • .... = 42
......	......	....
......	......	....

La relazione che abbiamo fatto nascere, per analogia con la precedente, è una **relazione di divisibilità**, dove **a è divisore di b**. In simboli a I b.
(**Il simbolo I si legge "è divisore di"**).

Proviamo a vedere se la relazione a I b è una relazione d'ordine. Un insieme con il simbolo $\leq$ è un insieme strutturato nel quale possiamo lavorare prendendo gli elementi, confrontandoli e ordinandoli.
Per spostare l'analogia sulla divisibilità dobbiamo poter dimostrare che anche nella relazione a I b valgono le proprietà: riflessiva, transitiva e antisimmetrica .

1) a I b è riflessiva perché a I a, infatti $\exists$ n $\in$ N $|$ a $\bullet$ n = a.
Questo n è 1.

2) a I b è transitiva perché se a I b e b I c allora a I c infatti:
se a $\bullet$ n = b e b $\bullet$ m = c allora a $\bullet$ n $\bullet$ m = c.
Esempio: se 3 I 6 e 6 I 24 $\Rightarrow$ 3 I 24.

3) a I b è antisimmetrica, infatti se fosse a I b e b I a (proprietà simmetrica) avremmo:
a $\bullet$ n = b e b $\bullet$ m = a cioè a $\bullet$ n $\bullet$ m = a che è vera se e solo se m $\bullet$ n = 1.
Essendo m = n = 1 segue che a $\bullet$ 1 = b , quindi a = b è l'unico caso in cui a I b e b I a.
Del resto, con alcuni esempi risulta evidente che nella divisibilità non esiste la proprietà simmetrica:
a) se 2 è divisore di 6, 6 non è divisore di 2;
b) se 5 è divisore di 15, 15 non è divisore di 5.
Quindi la relazione di divisibilità è una relazione d'ordine.

Se nell'insieme N consideriamo la relazione $\leq$, prendendo due numeri a caso possiamo sempre confrontarli e ordinarli. Con la relazione $\leq$ l'ordine è totale: non esiste un elemento massimo ma esiste un elemento minimo: lo zero .

Nello stesso insieme invece la relazione di divisibilità non sempre ci consente di confrontare due elementi presi a caso, possiamo avere anche coppie di elementi non confrontabili. In questo caso l'ordine è parziale.
Nella relazione di divisibilità l'elemento minimo è l'1 perché è divisore di tutti i numeri naturali .
Sappiamo che l'insieme N non ha un elemento massimo, ma in N strutturato con la divisibilità c'è un elemento massimo ?
Se esiste deve essere un elemento che può essere diviso da tutti i numeri naturali!
Un numero diviso da tutti gli altri c'è: è lo zero.
Infatti:
se a I 0 vuol dire che $\exists$ n $\in$ N tale che a $\bullet$ n = 0; questo n è lo 0.

Detto in altro modo: se vogliamo eseguire la divisione 0 / a dobbiamo trovare un numero n tale che moltiplicato per a ci dia 0; questo numero n è lo 0.

Lo zero è diviso da tutti i numeri e nella relazione di divisibilità è l'elemento massimo.
Essendo lo 0 divisibile per tutti i numeri naturali e l'1 divisore di tutti i numeri naturali, possiamo dire che nell'insieme N strutturato con la relazione di divisibilità, tutti i numeri sono compresi fra 0 e 1 !
Lo zero quindi è un elemento abbastanza strano se si considera anche il suo significato in insiemistica, nella moltiplicazione, nel nostro sistema di numerazione .

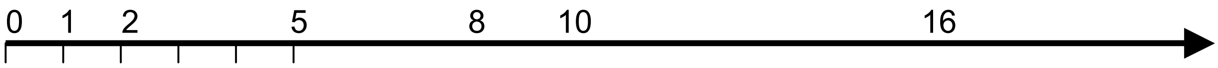
Consideriamo l'insieme **A = $\{$1, 10, 5, 8, 2, 16$\}$** .
Possiamo ordinarlo con la relazione $\leq$ ottenendo:

1 $\leq$ 2 $\leq$ 5 $\leq$ 8 $\leq$ 10 $\leq$ 16

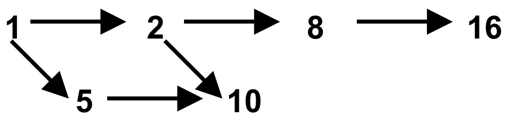
Usando un **grafo** avremo la scrittura: 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 16

(**grafo lineare**)

L'insieme A ordinato può anche essere rappresentato su una semiretta:



Vediamo come possiamo rappresentare lo stesso insieme ordinato con la divisibilità. Poiché la divisibilità non ci dà un ordine totale ma solo parziale non avremo un grafo lineare ma un **grafo a rete**, un **reticolo** :



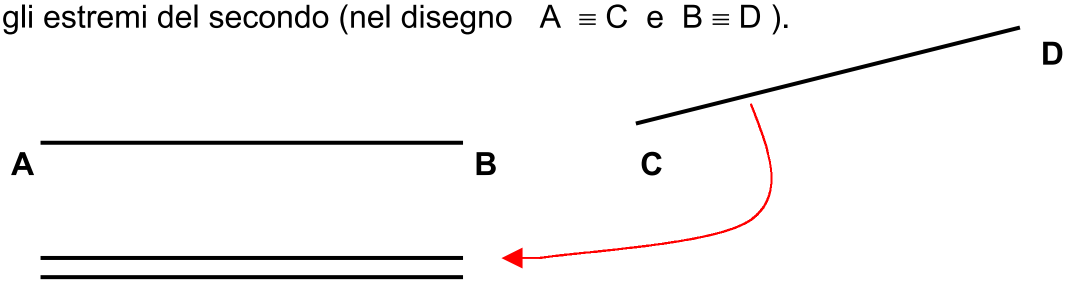
In pratica un numero divide un altro se esiste un cammino orientato che collega il primo al secondo. Il grafo ottenuto è un <u>grafo orientato</u>.
Quindi nell'insieme N tutti i numeri occupano un posto a caso e solo considerando la relazione $\leq$ "li disponiamo" sulla semiretta orientata (**diagramma di Hasse**) ove ciascuno occupa un posto ben preciso.

Se invece nell'insieme N consideriamo la relazione " **è divisore di** " allora otteniamo un'altra struttura la cui rappresentazione grafica è un reticolo o grafo orientato.

Lavorando con il $\leq$ aumenta la consapevolezza del concetto di ordine e si ottiene la successione dei numeri naturali mentre lavorando con la relazione di divisibilità si sviluppa il concetto di **MCD** e **mcm**.

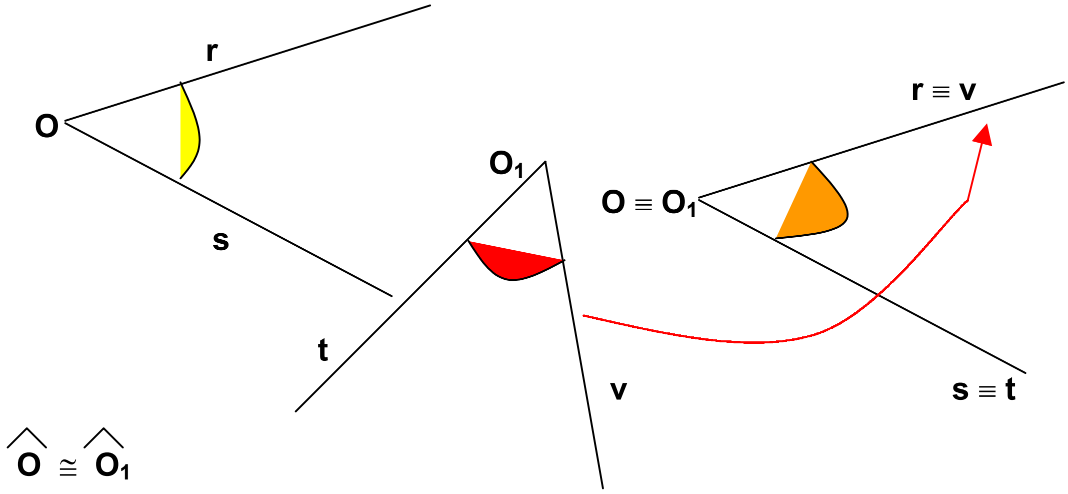
RELAZIONE DI CONGRUENZA

La congruenza è una forma particolare di uguaglianza riferita ad enti e figure geometriche.
Ad esempio si parla di segmenti congruenti quando, dopo aver eseguito il trasporto di un segmento sull'altro e quindi il confronto, gli estremi del primo segmento **coincidono** con gli estremi del secondo (nel disegno $A \equiv C$ e $B \equiv D$).



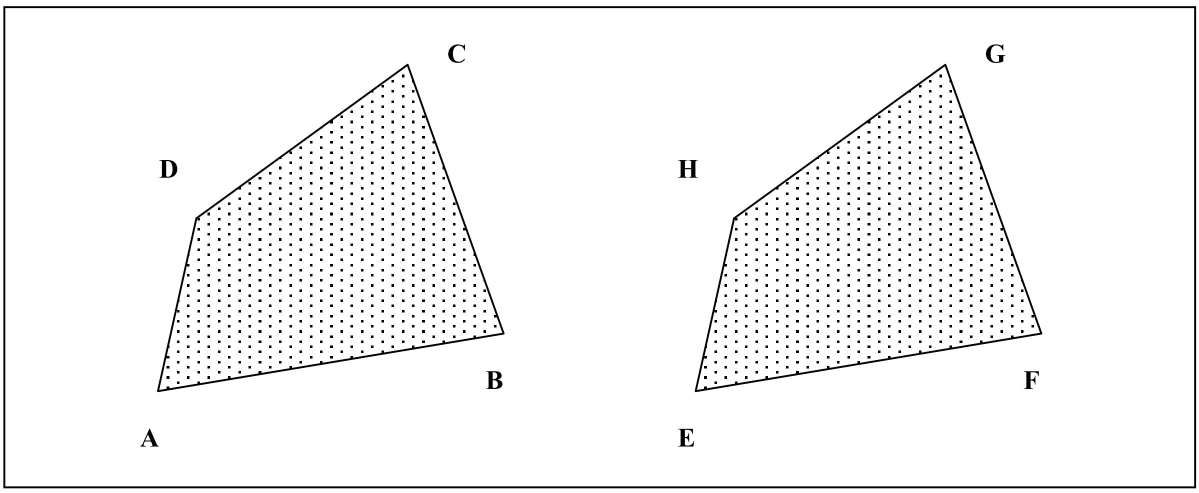
A $\equiv$ **C** **B** $\equiv$ **D** $\Rightarrow$ **AB** $\cong$ **CD**

Analogamente, due angoli si dicono congruenti se, dopo aver eseguito il trasporto e il confronto con il vertice ed un lato in comune e l'altro lato situato dalla stessa parte del lato comune, si verifica la sovrapposizione del secondo lato dei due angoli.



Se il confronto riguarda due figure piane qualsiasi per stabilire se sono congruenti si può procedere alla loro sovrapposizione mediante un movimento rigido cioè mediante una **isometria** (**simmetria centrale, simmetria assiale, rotazione, traslazione**).
Se tutti i punti della prima figura coincidono con tutti i corrispondenti punti della seconda figura allora le due figure sono congruenti e hanno congruenti pure i lati e gli angoli corrispondenti.

Poiché la sovrapposizione non è sempre possibile e comunque è poco pratico verificare la coincidenza di tutti i punti corrispondenti, per verificare la congruenza di due figure, ad esempio due poligoni ABCD e EFGH, è sufficiente e necessario verificare che siano congruenti tutti gli angoli ed i lati corrispondenti.



Riferendoci ai quadrilateri ABCD e EFGH, le condizioni di congruenza sono :

Lati	**Angoli**
$AB \cong EF$	$A \cong E$
$BC \cong FG$	$B \cong F$
$CD \cong GH$	$C \cong G$
$DA \cong HE$	$D \cong H$

La congruenza indica la proprietà di due figure geometriche di essere uguali sia per **forma** sia per **dimensioni**. Solo se hanno questa proprietà le figure possono essere fatte coincidere punto per punto. In pratica due figure congruenti differiscono solo per la posizione che occupano nello spazio o sul piano.
Essendo una forma particolare di uguaglianza, la congruenza soddisfa alle condizioni di essere riflessiva, simmetrica e transitiva:

a) Proprietà riflessiva: ogni figura è congruente a sé stessa ($F \cong F$);
b) Proprietà simmetrica: se una figura F è congruente ad una figura F_I , anche F_I è congruente ad F (se $F \cong F_I \Rightarrow F_I \cong F$);
c) Proprietà transitiva: se una figura F è congruente ad una figura F_I e la figura F_I è congruente ad una figura F_2 , allora F è congruente ad F_2 (se $F \cong F_I$ e $F_I \cong F_2$, $\Rightarrow F \cong F_2$).