

# Introduzione alla logica booleana

**Autore: Antonello Urso (01/07/11)**



## Introduzione

E' facile accorgersi del fatto che tale argomento destinato in genere a studenti delle scuola superiore viene purtroppo trattato da molti libri di matematica in modo troppo rigido e assiomatico per poter apprezzare la sua straordinaria importanza pratica; viceversa nei testi di elettronica digitale viene trattato in modo troppo tecnico per poter apprezzare tutti gli interessanti risvolti matematici. Questa trattazione viene svolta tenendo in debito conto le varie esigenze al fine di poter fare finalmente chiarezza su un tema che ha rivoluzionato il modo di concepire la matematica.

L'algebra booleana è stata sviluppata da George Boole nel 1854, ed è diventata famosa intorno al 1938 grazie a Claude Shannon poiché permette l'analisi delle reti di commutazione (i cui soli stati possono essere 1 e 0) ed ha lo scopo di verificare la correttezza o meno di un ragionamento, per far questo si trasformano le frasi di tutto il discorso in formule matematiche che entreranno in un sistema di calcolo dal quale è possibile stabilire se esse sono corrette o no.

I principi di questa algebra binaria sono strettamente legati a quelli della teoria degli insiemi dalla quale discende e che costituiscono quindi un prerequisito per la sua comprensione.

### Definizioni importanti:

- Si dice **proposizione** un enunciato per il quale è possibile stabilire se è vero o falso.
- Si dice **tautologia** un enunciato sempre vero, e **contraddizione** un enunciato sempre falso.
- Si dicono **connettivi logici** delle operazioni che possono legare una o più proposizioni.

Una proposizione ammette tre principi fondamentali:

**Principio di identità** : Ogni proposizione deve mantenere sempre lo stesso significato durante il discorso.  
**Principio di non contraddizione**: Una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.  
**Principio del terzo escluso**: Una proposizione può essere vera o falsa e non esiste una terza possibilità.

## Collegamenti con la teoria degli insiemi

Se consideriamo un insieme universo composto da un solo elemento:  $U = \{1\}$  possiamo avere solo i seguenti sottoinsiemi:  $\{1\}$  e  $\emptyset$ .

Se ora prendiamo tutte le combinazioni possibili di questi due sottoinsiemi rispetto all'operazione di unione e di intersezione avremo:

Per l'unione :	Per l'intersezione:	Per i complementari :	
$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$	$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\{1\}} = \emptyset$	
$\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$	$\emptyset \cap \{1\} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = \{1\}$	(1)
$\{1\} \cup \emptyset = \{1\}$	$\{1\} \cap \emptyset = \emptyset$		
$\{1\} \cup \{1\} = \{1\}$	$\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$		

Riscriviamo adesso tutto semplificando la notazione e facendo le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} \cup &\Rightarrow + (\text{OR } \circ \vee) ; \cap &\Rightarrow \cdot (\text{AND } \circ \wedge) \\ \{1\} &\Rightarrow 1 ; \emptyset &\Rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2)$$

dove il segno “+” e il segno “·” indicano rispettivamente una somma logica e un prodotto logico e non aritmetico. Avremo quindi nell'algebra di Boole due soli “numeri” 1 e 0, o più esattamente due stati logici visto che non si devono intendere in senso aritmetico e si potrebbero anche sostituire con due simboli contrapposti qualunque, per esempio: **V** (vero) e **F** (falso).

Otteniamo così anche il connettivo **NOT**:  $\bar{1}=0$  ;  $\bar{0}=1$  dove la parola “complementare”, della teoria degli insiemi, nell'algebra di Boole verrà sostituita con la parola “negato” e si dirà: 1 negato è uguale a 0, e 0 negato è uguale a 1. Similmente si potrà dire che il negato di vero è falso e il negato di falso è vero.

Facendo le sostituzioni (2) nella (1) otteniamo le cosiddette tabelle della verità o tabelle logiche. Le prime due colonne si chiamano **ingressi** e per 2 ingressi  $A$  e  $B$  abbiamo un totale di 4 combinazioni possibili. La terza colonna si chiama **uscita** e deriva dal calcolo della formula in esame secondo i vari casi all'ingresso.

### Connettivo OR:

Si può dire che se  $A$  **o**  $B$  (cioè l'uno o l'altro) sono allo stato 1 allora l'uscita sarà pure allo stato 1. Notiamo l'uso della congiunzione alternativa inclusiva “o” che è interpretabile in questo caso come una somma logica. Per esempio dire: almeno Aldo **o** Bruno è italiano si traduce in  $A+B=U$ , tenendo conto dei seguenti stati:

$A$	$B$	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$A = \begin{cases} 1 & \text{se Aldo è italiano} \\ 0 & \text{se Aldo non è italiano} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 & \text{se Bruno è italiano} \\ 0 & \text{se Bruno non è italiano} \end{cases} \quad U = \begin{cases} 1 & \text{se la frase è vera} \\ 0 & \text{se la frase è falsa} \end{cases}$$

Un altro esempio stavolta con l'uso dell'uscita predefinita: è sempre vero (tautologia cioè 1) che una proposizione ( $A$ ) può essere sempre vera **o** falsa, si traduce in:  $A+\bar{A}=1$

### Connettivo AND:

Si può dire che se  $A$  **e**  $B$  (cioè entrambi) sono allo stato 1 allora l'uscita sarà pure allo stato 1. Notiamo l'uso della congiunzione copulativa “e” che è interpretabile come prodotto logico. Per esempio: dire Aldo e Bruno sono italiani si traduce in  $A \cdot B = U$ .

$A$	$B$	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Un altro esempio con l'uso dell'uscita predefinita: è sempre falso (contraddizione cioè 0) che una proposizione ( $A$ ) può essere contemporaneamente vera **e** falsa, si traduce in  $A \cdot \bar{A} = 0$ .

**Regole e proprietà algebriche:**

Regole:

$$A+0 = A ; A \cdot 1 = A \quad (\text{elemento neutro della somma e del prodotto})$$

$$A+1 = 1 ; A \cdot 0 = 0 \quad (\text{assorbimento assoluto})$$

$$A+A = A ; A \cdot A = A \quad (\text{idempotenza di OR e AND})$$

$$A+\bar{A} = 1 ; A \cdot \bar{A} = 0 \quad (\text{tautologia e contraddizione})$$

$$A = \bar{\bar{A}} \quad (\text{doppia negazione})$$

Proprietà:

$$A+B = B+A ; A \cdot B = B \cdot A \quad (\text{commutativa})$$

$$A+(B+C) = (A+B)+C ; A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (\text{associativa})$$

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C ; A+B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C) \quad (\text{distributiva})$$

Teoremi:

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B} ; \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} \quad (\text{De Morgan})$$

$$\overline{f(A; B; C \dots; +; \cdot)} = f(\bar{A}; \bar{B}; \bar{C} \dots; \cdot; +) \quad (\text{De Morgan generalizzato})$$

$$f(A; B) = A \cdot f(1; B) + \bar{A} \cdot f(0; B) \quad (\text{Shannon})$$

$$f(A; B) = [A + f(0; B)] \cdot [\bar{A} + f(1; B)] \quad (\text{Shannon duale})$$

$$A + A \cdot B = A ; A \cdot (A+B) = A \quad (\text{Assorbimento di } B)$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A+B ; A \cdot (\bar{A}+B) = A \cdot B \quad (\text{Assorbimento di } \bar{A})$$

Essi derivano come si può facilmente riconoscere direttamente dalla teoria degli insiemi, una volta scambiati  $\cup$  e  $\cap$ , rispettivamente con: "+" e "·", e l'insieme universo e l'insieme vuoto rispettivamente con 1 e 0. Di notevole importanza è il seguente:

**Principio di dualità:**

***Da un'identità si può ottenere una nuova identità detta duale della precedente, scambiando gli operatori AND e OR, e scambiando, ove presenti, le costanti 0 e 1.***

Tale principio oltre che a fornire un importante contributo teorico e anche importante per la semplificazione delle funzioni algebriche. Facciamo qualche esempio sull'uso della tabella della verità:

**Esempio 1** - Dimostrazione del teorema di De Morgan:  $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$A$	$B$	$\overline{A+B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Avremo in questo caso 2 ingressi e 2 uscite (primo e secondo membro).

Ci sono solo quattro casi, dalla tabella si può vedere dopo avere effettuato i calcoli che la terza colonna è uguale alla quarta; quindi il primo membro della relazione è uguale al secondo membro.

Facciamo adesso vedere il modo di procedere per la prima riga riportando di seguito rispettivamente la prima e la seconda uscita che dovranno essere uguali.

Per l'ordine delle operazioni valgono le ben conosciute convenzioni algebriche: dopo lo svolgimento delle singole negazioni si passa prima al prodotto e poi alla somma, inoltre per semplicità si potrà omettere il simbolo del prodotto nelle formule.

Per la prima riga:  $\overline{0+0} = \overline{0} = 1$  ;  $\overline{0 \cdot 0} = 1 \cdot 1 = 1$

Per la seconda riga:  $\overline{0+1} = \overline{1} = 0$  ;  $\overline{0 \cdot 1} = 1 \cdot 0 = 0$

Per la terza riga:  $\overline{1+0} = \overline{1} = 0$  ;  $\overline{1 \cdot 0} = 0 \cdot 1 = 0$

Per la quarta riga:  $\overline{1+1} = \overline{1} = 0$  ;  $\overline{1 \cdot 1} = 0 \cdot 0 = 0$  come volevasi dimostrare.

Per esempio per questo teorema la frase: **non** è vero che Giulia ama Aldo **e** Bruno ( $\overline{A+B}$ ) si traduce ugualmente in: Giulia **non** ama Aldo **e non** ama Bruno ( $\overline{A} \cdot \overline{B}$ ).

Verifichiamo adesso il duale del teorema di De Morgan:  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$A$	$B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Per la prima riga:  $\overline{0 \cdot 0} = \overline{0} = 1$  ;  $\overline{0+0} = 1+1 = 1$

Per la seconda riga:  $\overline{0 \cdot 1} = \overline{0} = 1$  ;  $\overline{0+1} = 1+0 = 1$

Per la terza riga:  $\overline{1 \cdot 0} = \overline{0} = 1$  ;  $\overline{1+0} = 0+1 = 1$

Per la quarta riga:  $\overline{1 \cdot 1} = \overline{1} = 0$  ;  $\overline{1+1} = 0+0 = 0$

Per esempio per questo teorema la frase: “**non** è vero che Giulia ama Aldo **e** Bruno” ( $\overline{A \cdot B}$ ) è equivalente a: “Giulia **non** ama Aldo **e non** ama Bruno” ( $\overline{A} + \overline{B}$ ).

Un'altra dimostrazione del teorema di De Morgan si può ottenere utilizzando il teorema di Shannon:

$$f(A; B) = \overline{A+B} = A \cdot \overline{1+B} + \overline{A} \cdot \overline{0+B} = A \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot \overline{B} = A \cdot 0 + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$f(A; B) = \overline{A \cdot B} = (A+0 \cdot B) \cdot (\overline{A}+1 \cdot \overline{B}) = (A+0) \cdot (\overline{A} + \overline{B}) = 1 \cdot (\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A} + \overline{B}$$

Per il principio di dualità se una relazione è verificata anche la sua duale sarà verificata. Inoltre se una relazione è verificata in campo logico allora sarà verificata anche nel suo corrispettivo insiemistico e viceversa. La dimostrazione di tale principio si basa sul teorema di De Morgan.

Supponiamo di avere una relazione logica (per semplicità in due variabili e i due stati logici, ma si può facilmente estendere anche ad  $n$  variabili) sempre valida del tipo:

$$f(A; B; 1; 0; +; \cdot) = g(A; B; 1; 0; +; \cdot)$$

appliciamo il teorema di De Morgan generalizzato:

$$\overline{f(A; B; 1; 0; +; \cdot)} = \overline{g(A; B; 1; 0; +; \cdot)}$$

$$f(\overline{A}; \overline{B}; 0; 1; \cdot; +) = g(\overline{A}; \overline{B}; 0; 1; \cdot; +)$$

finora abbiamo ottenuto solo il negato della relazione di partenza, ma se sostituiamo  $\overline{A}$  con  $A$  e  $\overline{B}$  con  $B$  otteniamo:

$$f(A; B; 0; 1; \cdot; +) = g(A; B; 0; 1; \cdot; +)$$

che è proprio la duale della relazione di partenza.

**Esempio 2a** – dimostrazione del teorema di assorbimento di  $B$ :  $A + AB = A$

$A$	$B$	$A + AB$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Procediamo adesso con i calcoli logici per le varie righe: Per la prima riga:  $0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Per la seconda riga:  $0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$ . Per la terza riga:  $1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$ .

Per la quarta riga:  $1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1$

Notiamo che la prima e la terza colonna sono uguali, quindi la relazione è verificata.

Dimostriamo adesso la stessa relazione per via algebrica:

$$A + AB = A(1 + B) = A \text{ notando che } 1 + B = 1 \text{ per qualunque valore di } B.$$

Naturalmente anche la relazione duale  $A(A + B) = A$  è verificata, infatti:

$A$	$B$	$A(A + B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Per la prima riga:  $0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 = 0$

Per la seconda riga:  $0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$

Per la terza riga:  $1 \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

Per la quarta riga:  $1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$

Dimostrazione per via algebrica:  $A(A + B) = AA + AB = A + AB = A(1 + B) = A$

**Esempio 2b** - dimostrare algebricamente il teorema di assorbimento di  $\bar{A}$ :

$$A + \bar{A}B = A(1 + B) + \bar{A}B = A + AB + \bar{A}B = A + B(A + \bar{A}) = A + B \cdot 1 = A + B, \text{ e per la duale:}$$

$$A(\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB = 0 + AB = AB, \text{ come volevasi dimostrare.}$$

**Esempio 3** – dimostrazione della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma (PS):

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

In questo caso avremo una tabella con 3 ingressi, quindi 8 casi possibili, e 2 uscite.

$A$	$B$	$C$	$A \cdot (B + C)$	$A \cdot B + A \cdot C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Per la prima riga:  $0 \cdot (0+0) = 0 \cdot 0 = 0$  ;  $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Per la seconda riga:  $0 \cdot (0+1) = 0 \cdot 1 = 0$  ;  $0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$

Per la terza riga:  $0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0$  ;  $0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Per la quarta riga:  $0 \cdot (1+1) = 0 \cdot 1 = 0$  ;  $0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$

Per la quinta riga:  $1 \cdot (0+0) = 1 \cdot 0 = 0$  ;  $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Per la sesta riga:  $1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1$  ;  $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$

Per la settima riga:  $1 \cdot (1+0) = 1 \cdot 1 = 1$  ;  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$

Per l'ottava riga:  $1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 1 = 1$  ;  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1$

Notiamo che le due uscite sono uguali per tutti i casi possibili quindi la relazione è verificata. Sono possibili naturalmente dimostrazioni per via algebrica oltre che mediante tabella.

#### **Esempio 4**

Dimostrare algebricamente la proprietà distributiva SP:  $(A+B) \cdot (A+C) = A+B \cdot C$

$$\begin{aligned} (A+B) \cdot (A+C) &= AA + AC + BA + BC = A + AC + AB + BC = \\ &= A(1+C+B) + BC = A \cdot 1 + BC = A + BC \end{aligned}$$

Facciamo notare che:  $1+C+B=1$  è sempre uguale a 1 (tautologia) per qualunque valore di  $C$  e  $B$ .

#### **Esempio 5**

Ricavare algebricamente il teorema di De Morgan per tre variabili:

$$\overline{A+B+C} = \overline{(A+B)+C} = \overline{A+B} \cdot \overline{C} = \overline{A} \overline{B} \overline{C}$$

$$\overline{ABC} = \overline{(AB) \cdot C} = \overline{AB} + \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

#### **Estrazione e semplificazione di una funzione da una tabella della verità:**

Si può presentare l'esigenza di ricavare da una tabella la funzione logica relativa. Consideriamo il seguente esempio:

$A$	$B$	$U$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In questa tabella della verità sono rappresentate tutte le possibili uscite, una volta considerati tutti gli stati possibili degli ingressi  $A$  e  $B$ . Per trovare la funzione che rappresenta tale tabella ci sono due metodi.

Metodo della somma di prodotti (SP)

Basta riferirsi solo alle righe che hanno l'uscita 1 ; Segnando  $A$  se vale 1 nella prima colonna, e  $\bar{A}$  se troviamo 0, facciamo lo stesso per l'ingresso  $B$  in corrispondenza della seconda colonna. Moltiplichiamo poi tali variabili, e sommiamo per tutte le righe; otteniamo così:  $U = \bar{A}B + AB$  .

Tale relazione si può naturalmente semplificare (o minimizzare):

$$\bar{A}B + AB = (\bar{A} + A)B = 1 \cdot B = B ; \text{ cioè: } U = B .$$

Questo metodo conviene quando le uscite con lo stato 1 sono poche rispetto a quelle con lo stato 0.

Metodo del prodotto di somme (PS)

Basta solo riferirsi alle righe che hanno l'uscita 0 , segnando  $A$  situato nella prima colonna se esso vale 0 e  $\bar{A}$  se troviamo 1 , facciamo lo stesso per l'ingresso  $B$  in corrispondenza della seconda colonna, sommiamo poi tali variabili e infine infine moltiplichiamo i risultati per tutte le righe; otteniamo così:

$$\begin{aligned} (A + B)(\bar{A} + B) &= A\bar{A} + AB + B\bar{A} + BB = 0 + AB + \bar{A}B + B = \\ &= AB + \bar{A}B + B = B(A + \bar{A} + 1) = B \cdot 1 = B \end{aligned}$$

Questo metodo conviene quando le uscite con lo stato 0 sono molto poche rispetto a quelle con lo stato 1.

**Esempio 6**

Trovare e semplificare la funzione logica rappresentata da questa tabella:

$A$	$B$	$U$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Proviamo subito con il metodo PS visto che qui abbiamo un solo stato 0 :  $U = A + B$

Usiamo anche con il metodo SP: troviamo per le righe che hanno solo lo stato 1 la seguente espressione logica:  $U = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$  . Proviamo adesso a semplificarla:

$$U = \bar{A}B + A\bar{B} + AB = \bar{A}B + A(\bar{B} + B) = \bar{A}B + A \cdot 1 = \bar{A}B + A = A + \bar{A}B = A + B$$

Un altro metodo interessante per tentare di semplificare una funzione logica è sfruttare il principio di dualità:

$$\begin{aligned} \text{Dual}(U) &= \text{Dual}(\bar{A}B + A\bar{B} + AB) = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})(A + B) = (\bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{B})(A + B) = \\ &= (0 + \bar{A}\bar{B} + AB + 0)(A + B) = (\bar{A}\bar{B} + AB)(A + B) = \bar{A}\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}B + AB + AB = \\ &= 0 + 0 + AB = AB ; U = \text{Dual}(\text{Dual}(U)) = \text{Dual}(AB) = A + B \end{aligned}$$

**Esempio 7** - Semplificare la seguente espressione:  $U = ABC\bar{C} + \bar{A}B$  :

$$ABC\bar{C} + \bar{A}B = ABC\bar{C} + \bar{A}B(C + \bar{C}) = ABC\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} = ABC\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \\ = B\bar{C}(A + \bar{A}) + \bar{A}B(C + \bar{C}) = B\bar{C} + \bar{A}B = B(\bar{C} + \bar{A})$$

Sfruttando il principio di dualità:

$$\text{Dual}(U) = \text{Dual}(ABC\bar{C} + \bar{A}B) = (A + B + \bar{C})(\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB + B\bar{A} + B + \bar{C}\bar{A} + \bar{C}B = \\ = 0 + B(A + \bar{A} + 1 + \bar{C}) + \bar{C}\bar{A} = B + \bar{C}\bar{A}$$

$$U = \text{Dual}(\text{Dual}(U)) = \text{Dual}(B + \bar{C}\bar{A}) = B(\bar{C} + \bar{A}) ; \text{ come volevasi dimostrare.}$$

### **Connettivo OR esclusivo (EXOR):**

Questo connettivo dà lo stato 1 solo se le due variabili sono diverse, altrimenti dà lo stato 0, quindi, in senso tautologico, è un operatore di disuguaglianza assoluta.<sup>1</sup>

$A$	$B$	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Usando il metodo SP otteniamo:  $A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$

Notiamo che esso è uguale alla somma logica tranne per la quarta riga, questa somiglianza si può sfruttare in frasi che hanno la congiunzione “e” ma richiedono l'esclusione (stato 0) nel caso che le variabili in gioco siano entrambe vere (stato 1); per esempio l'enunciato: ”*Aldo adesso è a Roma e Milano*” significa, come sappiamo, che Aldo può essere a Roma e non a Milano, oppure a Milano e non a Roma, ma non può essere nello stesso momento nelle due città.

### **Connettivo “Se... Allora...” - Implicazione unidirezionale:**

La congiunzione proposizionale *Se... Allora...* è un connettivo logico che lega in un'implicazione due variabili, e si indica di solito con una freccia puntata verso destra:  $A \rightarrow B$

Quindi: se si verifica  $A$  allora si verifica anche  $B$ ; tale relazione vale sempre in un solo senso ma non vale in generale in senso opposto, cioè non è commutativa, quindi se succede  $B$  non è detto che succeda  $A$ .

Facciamo un esempio: Se io sono nato a Roma ( $A$ ) allora sono italiano ( $B$ ); ma in generale non vale il viceversa: se io sono italiano non è detto che sia nato a Roma. Le variabili e la tabella della verità relativa a tale connettivo sono i seguenti:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{se sono nato a Roma} \\ 0 & \text{se non sono nato a Roma} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 & \text{se sono italiano} \\ 0 & \text{se non sono italiano} \end{cases} \quad U = \begin{cases} 1 & \text{se la frase è vera} \\ 0 & \text{se la frase è falsa} \end{cases}$$

<sup>1</sup> EXOR o XOR è l'equivalente booleano della differenza simmetrica tra due insiemi:  $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

$A$	$B$	$U$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La prima e la seconda riga iniziano con  $A$  che indica che **non** sono nato a Roma, quindi sono ambedue possibili i casi che sia italiano **o** no, di conseguenza le uscite sono sempre vere cioè 1.

La terza riga che dice che se sono nato a Roma allora non sono italiano, è falsa, cioè con uscita 0.

La quarta riga che dice che se sono nato a Roma allora sono italiano, è vera, cioè con uscita 1.

Per ricavare la funzione logica possiamo procedere con il metodo PS usando la terza riga, che è l'unica ad avere l'uscita con stato 0, quindi:  $U = \bar{A} + B$  o anche:  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

Un equivalente di questa relazione è la cosiddetta contronominale, ovvero la possibilità di invertire l'implicazione unidirezionale negando le due variabili. Dimostriamo che:  $\bar{B} \rightarrow \bar{A} = A \rightarrow B$

Quindi se non sono italiano allora non sono nato a Roma. Le due relazioni sono equivalenti, per dimostrarlo basta negare la prima variabile e sommarla alla seconda:

$$\bar{B} \rightarrow \bar{A} = \bar{\bar{B}} + \bar{A} = B + \bar{A} = \bar{A} + B = A \rightarrow B \text{ come volevasi dimostrare.}$$

In modo equivalente l'implicazione si può voltare introducendo il concetto di “necessario” (N) e “sufficiente” (S). Quindi possiamo dire che è sufficiente (ma non necessario) che si verifichi  $A$  affinché si verifichi anche  $B$ ; oppure: è necessario (ma non sufficiente) che si verifichi  $B$  affinché si verifichi anche  $A$ . In termini algebrici:  $A \rightarrow B = (SA) \rightarrow B = (NB) \rightarrow A$

Altri esempi che fanno uso di tale connettivo si possono costruire utilizzando per esempio il verbo essere oppure il verbo avere nel discorso: “Mario ha i capelli neri” e “Luca è un contadino” sono frasi dove non vale il viceversa, quindi: Mario  $\rightarrow$  Capelli neri ; Luca  $\rightarrow$  Contadino

Un altro interessante caso dell'implicazione unidirezionale è il seguente:  $\overline{A \rightarrow B} = \overline{\bar{A} + B} = A\bar{B}$  ; dove  $A\bar{B}$  e si può leggere come “ $A$  **e non**  $B$ ” o allo stesso modo<sup>2</sup> “ $A$  **senza**  $B$ ” cioè:  $A\bar{B} \equiv A - B$ . Quindi avremo l'importante risultato:  $\overline{A \rightarrow B} = A - B$

E' possibile formare così frasi equivalenti del tipo: “**non** è vero che se Aldo suda ( $A$ ) allora si ammala ( $B$ )” che è equivalente a “Aldo suda ( $A$ ) **e non** si ammala ( $B$ )” oppure “Aldo suda ( $A$ ) **senza** ammalarsi ( $B$ )”.

**Esempio 8** - Verifica che l'implicazione unidirezionale gode della proprietà transitiva:

*E' sempre vero che [(se  $A$  implica  $B$ ) **e** (se  $B$  implica  $C$ )]  
allora ( $A$  implica  $C$ ).*

Si traduce algebricamente:  $[(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C) = 1$  cioè:  $(\bar{A} + B)(\bar{B} + C) + \bar{A} + C = 1$

Sviluppando con il teorema di De Morgan otteniamo:

<sup>2</sup> E' l'equivalente booleano della differenza di due insiemi:  $A - B = A \cap \bar{B}$

$$(\overline{A+B}) + (\overline{B+C}) + \overline{A} + C = \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{A} + C = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A} + C$$

Adesso non resta che studiare la relazione:  $U(A; B; C) = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A} + C$

Per dimostrare che essa conduce ad una tautologia senza compilare la tabella useremo il *metodo di Shannon*: per procedere basta solo dimostrare che qualunque valore assuma una qualsiasi variabile per esempio  $B$  darà sempre come risultato lo stato 1:

$$U(A; 1; C) = A \cdot 0 + 1 \cdot \overline{C} + \overline{A} + C = \overline{C} + C + \overline{A} = 1 + \overline{A} = 1$$

$$U(A; 0; C) = A \cdot 1 + 0 \cdot \overline{C} + \overline{A} + C = A + \overline{A} + C = 1 + C = 1$$

Per esempio, se usati in senso relazionale, i verbi: “è”, ed “ha” godono della proprietà transitiva: “Se Aldo è un operaio e se un operaio è un lavoratore allora Aldo è un lavoratore”, “Se Bruno ha una casa e se la casa ha una finestra allora Bruno ha una finestra”.

### **Connettivo “Se e solo se... Allora...” - Implicazione bidirezionale:**

“Se e solo se... Allora...” oppure “Se... Allora... e viceversa” è un connettivo logico che lega due variabili, e si indica di solito con una freccia puntata in ambedue le direzioni:  $A \leftrightarrow B$ .

Quindi se è solo se si verifica  $A$  allora si verifica anche  $B$ . Tale relazione<sup>3</sup> vale sempre nei due sensi, cioè è commutativa. Esempio: Se è solo se un triangolo è equilatero ( $A$ ) allora avrà tutti gli angoli interni uguali ( $B$ ). Le variabili e la tabella della verità relativa a tale connettivo sono i seguenti:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{se è un triangolo equil.} \\ 0 & \text{se non è un triangolo equil.} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 & \text{se ha gli angoli uguali} \\ 0 & \text{se non ha gli angoli uguali} \end{cases} \quad U = \begin{cases} 1 & \text{se la frase è vera} \\ 0 & \text{se la frase è falsa} \end{cases}$$

$A$	$B$	$U$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La prima e la quarta riga indicano che  $A$  e  $B$  sono entrambe vere o entrambe false, quindi la relazione è vera cioè  $U = 1$ . La seconde e la terza invece indicano che se è vera l'una l'altra è falsa, quindi in questo caso la relazione non essendo verificata è falsa quindi  $U = 0$ .

Notiamo dalla tabella che il connettivo bidirezionale da come uscita 1 se le variabili sono uguali e 0 se sono diverse; di conseguenza si può anche interpretare algebricamente come segno di uguaglianza, cioè: Se e solo se  $A = B$  allora  $U = 1$ . Procedendo con il metodo SP abbiamo:  $U = \overline{A}\overline{B} + AB$  o anche  $A \leftrightarrow B = \overline{A}\overline{B} + AB$

Una relazione equivalente di questa definizione è la seguente: “se si verifica  $A$  allora si verifica anche  $B$  e viceversa”, che in termini algebrici viene:  $(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) = A \leftrightarrow B$ . Dimostrazione:

$$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) = (\overline{A} + B) \cdot (\overline{B} + A) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}A + B\overline{B} + AB = \overline{A}\overline{B} + 0 + 0 + AB = \overline{A}\overline{B} + AB = A \leftrightarrow B$$

<sup>3</sup> In modo equivalente: condizione necessaria e sufficiente affinché si verifichi  $A$  è che si verifichi  $B$ .

Vediamo adesso una importante conseguenza dell'implicazione bidirezionale; scriviamo la tabella della verità aggiungendo una quarta colonna dove inseriremo la negazione della prima uscita:

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A \leftrightarrow B}$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

La quarta colonna (seconda uscita) non è altro che il connettivo OR esclusivo; otteniamo così l'importante risultato:  $\overline{A \leftrightarrow B} = A \oplus B$

Dato che l'implicazione bidirezionale, come tautologia, non è altro che un'uguaglianza logica (come è possibile verificare dalla sua tabella) questa relazione si può interpretare dicendo che è *sempre vero* che il negato di un'uguaglianza è una disuguaglianza assoluta e *viceversa*.

Facciamo un esempio con una frase che descrive tale formula: “**non** è vero che se Aldo ( $A$ ) è nato a Roma allora è piemontese ( $B$ ) e *viceversa*” è logicamente equivalente alla frase “O Aldo ( $A$ ) è nato a Roma e piemontese ( $B$ )”.

### Uso delle congiunzioni “e”, ed “o” nell'implicazione bidirezionale

È possibile anche nella implicazione bidirezionale l'uso delle congiunzioni “o” ed “e” come connettivi: Consideriamo il seguente: “E' vero che se e solo se si verifica  $A$  o  $B$  allora prenderò la decisione  $U_o$ ”; oppure: “E' vero che se e solo se si verifica  $A$  e  $B$  allora prenderò la decisione  $U_e$ ”. Queste due frasi si traducono algebricamente nella seguente tautologia:

$$[(A + B) \leftrightarrow U_o] = 1 \quad ; \quad (AB \leftrightarrow U_e) = 1$$

poiché l'implicazione bidirezionale comporta, nel caso tautologico, sempre un'uguaglianza ne consegue che:  $A + B = U_o$  ;  $AB = U_e$ .

Per chiarire meglio il concetto facciamo un esempio concreto con la seguente frase: “Se Aldo o Bruno andrà alla festa allora deciderò di partecipare e *viceversa*”.

Con l'uso della tabella della verità possiamo studiare i vari casi dopo aver definito gli stati che possono assumere le variabili in gioco:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{se Aldo partecipa} \\ 0 & \text{se Aldo non partecipa} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 & \text{se Bruno partecipa} \\ 0 & \text{se Bruno non partecipa} \end{cases} \quad U_o = \begin{cases} 1 & \text{se parteciperò} \\ 0 & \text{se non parteciperò} \end{cases}$$

$A$	$B$	$U_o$	$U_e$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Vediamo dalla tabella che solo nella prima riga dalla quale si deduce che Aldo e Bruno non parteciperanno la mia decisione sarà di non partecipare, mentre in tutti gli altri casi visto che

almeno uno dei due parteciperà allora anch'io deciderò di partecipare. La funzione che esprime l'uscita è una somma logica:  $A + B = U_o$ .

Se invece dico: “se Aldo *e* Bruno parteciperanno alla festa allora anch'io deciderò di partecipare *e* viceversa” la frase indicherà che voglio la presenza di entrambi per decidere di partecipare, quindi nella tabella ci sarà solo la quarta riga con lo stato 1. La funzione che esprime l'uscita in questo caso è un prodotto logico:  $AB = U_e$ .

### **Relazioni transitive e antitransitive:**

Una relazione che gode della proprietà transitiva è la seguente:

$(A \mathfrak{R} B) \cdot (B \mathfrak{R} C) \rightarrow (A \mathfrak{R} C)$  dove con  $\mathfrak{R}$  si indica un connettivo logico o una specifica relazione esistente tra due variabili; nel caso dell'implicazione unidirezionale abbiamo visto nell'esempio 8 che la relazione è sempre vera, così come si può dimostrare che è sempre vera anche per l'implicazione bidirezionale e il prodotto logico AND. Mentre una relazione si dirà antitransitiva se è sempre vero che:  $(A \mathfrak{R} B) \cdot (B \mathfrak{R} C) \rightarrow \overline{A \mathfrak{R} C}$  come per esempio il caso dell' EXOR.

Un esempio di relazione transitiva sempre vera è “è parallela alla”, dove  $A$  e  $B$  sono due rette parallele o perpendicolari: “(Se la retta  $A$  è parallela alla retta  $B$ ) *e* (la retta  $B$  è parallela alla retta  $C$ ) allora (la retta  $A$  è parallela alla retta  $C$ )”.

Mente un esempio di relazione antitransitiva sempre vera è “è perpendicolare alla”: “(Se la retta  $A$  è perpendicolare alla retta  $B$ ) *e* (la retta  $B$  è perpendicolare alla retta  $C$ ) allora non è vero che (la retta  $A$  è perpendicolare alla retta  $C$ )”. Naturalmente una relazione può non essere né transitiva né antitransitiva come per esempio nel caso del connettivo OR.

**Esempio 9** - Verifica che il connettivo EXOR gode della proprietà antitransitiva:

Abbiamo che:  $\left[ (A \oplus B) \cdot (B \oplus C) \rightarrow \overline{A \oplus C} \right] = 1$  quindi:  $U = \overline{(\overline{AB} + AB)(\overline{BC} + BC)} + \overline{AC + AC} = 1$ .

Per dimostrare che essa conduce ad una tautologia useremo il *metodo di Shannon*: per procedere basta solo dimostrare che qualunque valore assuma la variabile  $A$  (ma possiamo sceglierne anche un'altra) darà sempre come risultato lo stato logico 1:

$$U(0; B; C) = \overline{B(\overline{BC} + BC)} + \overline{C} = \overline{BC} + \overline{C} = \overline{B} + C + \overline{C} = \overline{B} + 1 = 1$$

$$U(1; B; C) = \overline{\overline{B}(\overline{BC} + BC)} + C = \overline{BC} + C = B + \overline{C} + C = B + 1 = 1$$

Come volevasi dimostrare.

### **Le dimostrazioni nella logica:**

La dimostrazione di un teorema è un enunciato costituito da una tesi preceduta da una o più ipotesi supposte vere. L'enunciato è composto da:

1. IPOTESI (**I**, il punto di partenza)
2. TESI (**T** l'obiettivo da dimostrare)

Nel caso che l'ipotesi sufficiente fosse falsa avremo che la tesi potrebbe essere vera o falsa, e questa **non** è una dimostrazione anche se potrebbe uscire fuori che la tesi è vera. Esempio:

“*E' certamente vero che se oggi è il 30 febbraio (Ipotesi) allora mangerò all'ora di pranzo (Tesi)”, è chiaro che non esiste il 30 febbraio mentre la tesi potrebbe benissimo essere vera.*

Allo stesso modo **non** è una dimostrazione se l'ipotesi è vera, ma non c'è relazione tra tesi ed ipotesi. Esempio: “*E' certamente vero che se oggi non piove (Ipotesi) allora domani non pioverà (Tesi)”, anche qui è chiaro che se oggi non piove non significa che certamente anche domani non pioverà.*

L'enunciato di un teorema si può quindi sintetizzare con:  $I_s = 1$  e  $I_s \rightarrow T = 1$  nel caso che l'ipotesi sia sufficiente (ma non necessaria) per avere la tesi, e con:  $I_{NS} \leftrightarrow T = 1$  nel caso che l'ipotesi sia necessaria e sufficiente per avere la tesi. Se le ipotesi usate sono più di una allora devono essere valide tutte insieme per poter dimostrare la tesi, per esempio nel caso della sufficienza avremo:  $I_{1s} \cdot I_{2s} \cdot \dots \cdot I_{ns} = 1$  e  $I_{1s} \cdot I_{2s} \cdot \dots \cdot I_{ns} \rightarrow T = 1$ ; notiamo che comunque anche se una o più ipotesi non fossero verificate non si può concludere che la tesi non è mai verificata.

Abbiamo principalmente due tipi di dimostrazione:

Dimostrazione diretta (modus ponens)

Essa fa uso dell'implicazione unidirezionale. *E' sempre vero che se  $I \rightarrow T$  e  $I$  sono vere allora anche  $T$  è vera.* Verifichiamo che  $I \cdot (I \rightarrow T) \rightarrow T$  è una tautologia:

$$I \cdot (I \rightarrow T) \rightarrow T = I \cdot (\bar{I} + T) \rightarrow T = I \cdot T \rightarrow T = \overline{I \cdot T} + T = \bar{I} + \bar{T} + T = \bar{I} + 1 = 1$$

Dimostrazione indiretta (modus tollens)

Fa uso della contronominale  $\bar{T} \rightarrow \bar{I} = I \rightarrow T$ . In pratica si nega la tesi per dimostrare che anche l'ipotesi è falsa contro l'assunto iniziale che sia vera, da cui l'assurdo, quindi la tesi deve essere vera (altrimenti l'ipotesi sarà falsa). In altri termini: *è sempre vero che se  $I \rightarrow T$  e  $\bar{T}$  sono vere allora anche  $\bar{I}$  è vera.* Verifichiamo che  $\bar{T} \cdot (I \rightarrow T) \rightarrow \bar{I}$  è una tautologia:

$$\bar{T} \cdot (I \rightarrow T) \rightarrow \bar{I} = \bar{T} \cdot (\bar{I} + T) \rightarrow \bar{I} = \bar{T} \cdot \bar{I} \rightarrow \bar{I} = \overline{\bar{T} \cdot \bar{I}} + \bar{I} = T + I + \bar{I} = T + 1 = 1$$

Caso particolare di dimostrazione indiretta

Supponiamo adesso di avere a disposizione due ipotesi  $I_1$  e  $I_2$  che se entrambe verificate segue la validità della tesi  $T$  cioè:  $I_1 \cdot I_2 \rightarrow T$ , se però una delle ipotesi è verificata ma la tesi non è verificata allora possiamo concludere che la seconda ipotesi certamente non è verificata, cioè in formula:

$(I_1 \cdot I_2 \rightarrow T) \leftrightarrow (I_1 \cdot \bar{T} \rightarrow \bar{I}_2)$ , la dimostrazione è la seguente:

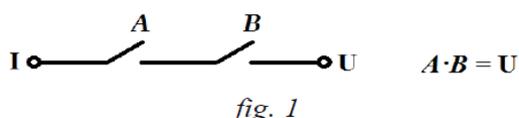
$$\overline{I_1 \cdot I_2} + T = \overline{I_1 \cdot \bar{T}} + \bar{I}_2 ; \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + T = \bar{I}_1 + T + \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + T$$

Questo teorema è un caso particolare di *reversibilità* del modus tollens che ci permette di conoscere il comportamento di una delle condizioni nell'ipotesi studiata. Tale teorema si può naturalmente generalizzare facilmente nel caso di più di due ipotesi: se la tesi è falsa allora certamente almeno una delle ipotesi deve essere falsa.

### Logica e circuiti di commutazione

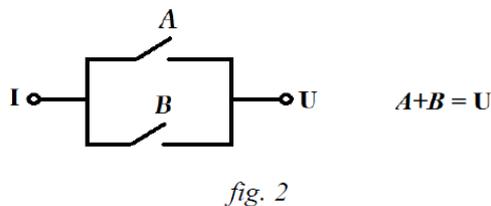
Vediamo come sia possibile applicare la logica a semplici circuiti con interruttori ON – OFF. Consideriamo la seguente linea di un circuito composto da due interruttori  $A$  e  $B$  posti in serie e una corrente elettrica che passa per l'ingresso  $I$  e che può, o non può, arrivare all'uscita  $U$ . Definiamo quindi le variabili in gioco:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{interruttore chiuso} \\ 0 & \text{interruttore aperto} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 & \text{interruttore chiuso} \\ 0 & \text{interruttore aperto} \end{cases} \quad U = \begin{cases} 1 & \text{se passa la corrente} \\ 0 & \text{se non passa la corrente} \end{cases}$$



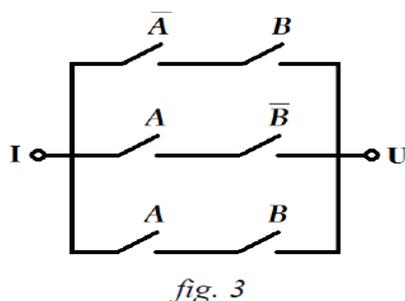
Se e solo se i due interruttori  $A$  e  $B$  sono ambedue chiusi allora può arrivare la corrente all'uscita  $U$ , e l'equazione che descrive questo comportamento è chiaramente un prodotto logico.

Consideriamo ora la seguente linea di un circuito composto da due interruttori  $A$  e  $B$  posti in parallelo e una corrente elettrica che passa per l'ingresso  $I$  e che può, o non può, arrivare all'uscita  $U$ .



In questo caso se e solo se almeno  $A$  o  $B$  sono chiusi allora può arrivare la corrente all'uscita  $U$ , e l'equazione che descrive questo comportamento è chiaramente una somma logica.

Facciamo qualche esempio: ricaviamo il circuito elettrico equivalente alla seguente funzione logica:  $U = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$ ; abbiamo tre coppie (in parallelo tra loro) di interruttori in serie:



Semplificando tale funzione otteniamo:  $U = A + B$  quindi basterebbero solo 2 interruttori in parallelo invece di 6. Semplificare nella logica significa appunto ridurre al minimo il numero dei termini di una funzione a parità di risultato, e questo assume un'importanza notevole nel risparmio di materiale e di spazio per la fabbricazione di circuiti logici.

Gli interruttori che abbiamo qui considerato in modo semplice si chiamano in termini elettronici “*porte logiche*” e sono degli interruttori elettronici miniaturizzati e comandati da impulsi di corrente mediante un terzo ingresso il quale mediante il passaggio o meno di una corrente elettrica comanda l'apertura o la chiusura “dell'interruttore”, e tutto questo è il cuore del funzionamento dei computer.

### Funzionamento di una calcolatrice

Una calcolatrice per poter compiere il suo lavoro fa uso del seguente schema a blocchi:

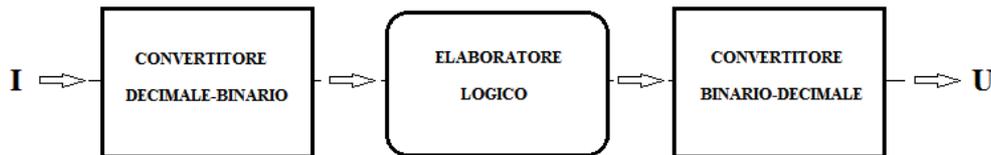


fig.4

Incontriamo all'ingresso un convertitore che compie una conversione dei numeri che inseriamo nel sistema decimale e li converte nel sistema binario, poi il tutto passa ad un elaboratore logico che processa i dati immessi usando formule dell'algebra di Boole già programmate dal costruttore e che compie con questi numeri una o più operazioni come somma, sottrazione, ecc. già indicate all'ingresso insieme ai numeri immessi, fatto ciò il risultato finale espresso in numeri binari passa per un convertitore che compie una conversione da numeri binari a decimali e li porta sul display.

### Mappe di Karnaugh

Ci sono molte trattazioni che parlano di questo argomento ma vista la sua importanza è giusto almeno accennare in questa introduzione ai principi fondanti.

Le mappe di Karnaugh sono in genere tabelle 2x2, 2x4, o 4x4 usate per minimizzare funzioni logiche rispettivamente a 2, 3, o 4 variabili. All'interno della tabella devono essere riportati i valori assunti dalla funzione secondo i valori delle variabili di ingresso dati dalla tabella della verità.

Due caselle con un lato comune vengono dette adiacenti; si devono considerare tali anche le caselle alle estremità opposte, come se la mappa si potesse chiudere su sé stessa. Gli stati logici in alto e a sinistra sono disposti in modo tale che tra caselle adiacenti cambia il valore di una sola variabile; essi sono sempre disposti per una variabile come 0,1 e per due variabili come 00,01,11,10.

Vediamo adesso i due metodi (l'uno il duale dell'altro) di risoluzione:

#### Metodo della somma di prodotti (SP)

Una volta completata la mappa di Karnaugh si cerca di individuare il minor numero possibile gruppi rettangolari di **1** adiacenti (che ne contengano il maggior numero possibile) sempre in quantità di 1, 2, 4, 8. Ad ogni raggruppamento si fa corrispondere il prodotto delle sole variabili che hanno lo stesso valore in tutte le caselle, queste vanno negate se hanno valore **0** ed affermate se hanno valore **1**. Si esegue poi la somma di tutti i prodotti ottenuti (mintermini).

### Metodo del prodotto di somme (PS)

Una volta completata la mappa di Karnaugh si cerca di individuare il minor numero possibile gruppi rettangolari di **0** adiacenti (che ne contengano il maggior numero possibile) sempre in quantità di 1, 2, 4, 8. Ad ogni raggruppamento si fa corrispondere la somma delle sole variabili che hanno lo stesso valore in tutte le caselle, queste vanno negate se hanno valore **1** ed affermate se hanno valore **0**. Si esegue poi il prodotto di tutte le somme, tra parentesi, ottenute (maxtermini).

Un errore che spesso si commette quando si cerca di minimizzare una funzione logica è quello di considerare lo stato logico **1** come se avesse un qualche “privilegio algebrico” rispetto allo stato **0** credendo che il metodo SP conduca sempre ad una migliore minimizzazione.

Consideriamo come esempio la seguente funzione logica da minimizzare visualizzata nella seguente mappa:

vediamo che i raggruppamenti più grandi di **1** sono quattro (2x2 ognuno) e portano al risultato (SP):

$$f(A; B) = AC + AD + BC + BD$$

mentre i raggruppamenti più grandi di **0** sono solo due (1x4 ognuno) e portano al risultato (PS):

$$f(A; B) = (A + B)(C + D)$$

da qui si vede che il metodo SP porta a un risultato finale di sette operazioni da gestire (tra somme e prodotti) mentre il metodo PS solo tre ed è quindi, in questo caso, preferibile.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	0	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	1

### Problemi logici insoliti

Oltre ai comuni esercizi di logica che si possono trovare in tutti i testi scolastici esistono anche singolari rompicapi dove il ragionamento di tipo logico-binario è la chiave per risolverli. Provate a risolvere questo:

#### Alice nel paese delle logico-meraviglie.

Il bosco comincia ad essere buio e Alice nel tentativo di scoprire finalmente un modo per trovare la strada di casa decide di entrare in una misteriosa grotta che porta ad un lunga galleria illuminata ai lati da due file uguali di fiammeggianti torce; con sempre maggiore curiosità comincia ad attraversarla mentre dietro di lei stridendo si chiude il portone dell'ingresso. Alla fine del corridoio si trova davanti con sua grande meraviglia due enormi porte bianche identiche e due guardiani fratelli gemelli pure loro identici dritti e immobili nelle loro armature scintillanti. In un cartello lì vicino trova scritto:

*“Siete giunti alla prova suprema: una di queste porte conduce alla salvezza, mentre l'altra alla rovina; potete fare una sola domanda al primo o al secondo guardiano ma non ad entrambi e riceverete un'unica risposta da chi avrete interrogato, ma attenzione perché uno di loro dice sempre la verità mentre l'altro dice sempre falsità.”*

Alice sa che non può più tornare indietro ma sa anche che è molto vicina a trovare il modo per salvarsi e tornare finalmente a casa... Ma qual è la domanda giusta?