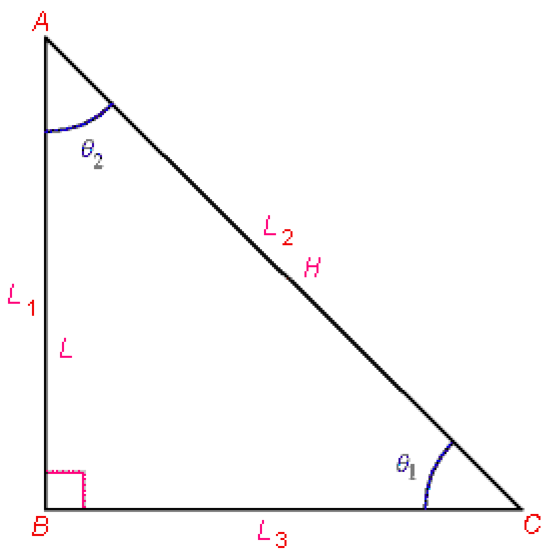
Trigonometria: teorema dei seni e teorema del coseno

Chiunque abbia frequentato un corso di geometria sa che per determinare un triangolo occorre un minimo di informazioni sul triangolo. Si possono avere i seguenti casi:



LLL : sono noti i tre lati
ALA : sono noti due angoli e il lato adiacente
LAL : sono noti due lati e l'angolo tra essi compreso
AAL : sono noti 2 angoli e un lato non adiacente ad essi
IC   : sono noti l'ipotenusa e un cateto in un triangolo rettangolo

Se sono noti 2 lati e un angolo non compreso (LLA), l'informazione *non è sufficiente* per determinare un unico triangolo.

La Legge dei Coseni è un teorema che possiamo usare per determinare elementi incogniti di un triangolo nei seguenti casi: LLL, LAL, IC.

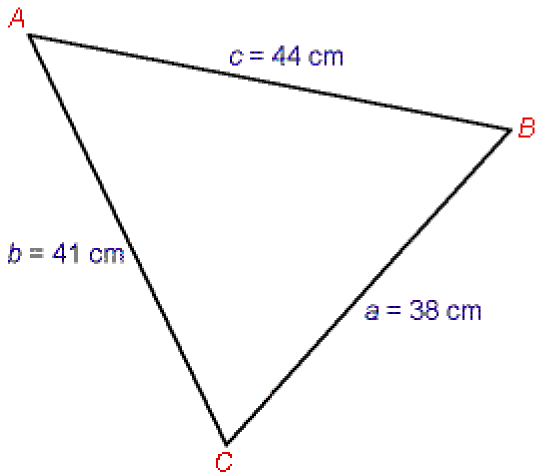
Analogamente, il teorema dei seni può essere usato nei seguenti casi: ALA, AAL, IC.

Equazioni

Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

Teorema dei seni: $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

Esempio 1



Nel caso LLL trovare gli angoli A, B e C.

$a := 38 \cdot cm$
$b := 41 \cdot cm$
$c := 44 \cdot cm$

Poiché

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

risolvendo rispetto A otteniamo $A := \pi - \operatorname{acos}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2\right)}{(b \cdot c)}\right]$

$A = 52.967 \cdot deg$

Poiché $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$

risolvendo rispetto a B otteniamo

$B := \pi - \operatorname{acos}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(b^2 - a^2 - c^2\right)}{(a \cdot c)}\right]$

$B = 59.464 \cdot deg$

Infine

$C := 180 \cdot deg - A - B$

$C = 67.568 \cdot deg$

Da dove viene π nei risultati ottenuti per A e B?

Se risolviamo l'equazione seguente rispetto al coseno di A e non rispetto all'angolo A, otteniamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{Cos}(A)$$

che ha come soluzione

$$\frac{-1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2\right)}{(b \cdot c)}$$

La differenza, consiste nell'applicare la funzione **acos** a ciascun membro. Un processore simbolico usa l'identità acos(–x) = π – acos(x) e restituisce la rappresentazione preferita della soluzione:

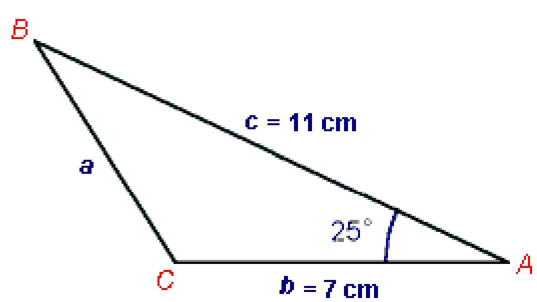
$$\mathrm{acos}(\cos(A)) = \mathrm{acos}\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2\right)}{(b \cdot c)}\right]$$

Da cui si ricava

$$A = \pi - \mathrm{acos}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2\right)}{(b \cdot c)}\right]$$

Esempio 2

Nel caso LAL trovare la lunghezza dell'altro lato e degli altri angoli.



$b := 7 \cdot cm$
$c := 11 \cdot cm$
$A := 25 \cdot deg$

Poiché

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

risolvendo rispetto ad **a** otteniamo

$$a := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot b^2 + 4\cdot c^2 - 8\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)} \\ \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot b^2 + 4\cdot c^2 - 8\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)} \end{bmatrix}$$

(Solo il valore positivo è accettabile perché il lato di un triangolo non può essere negativo)

$$a = \begin{bmatrix} 5.516 \\ -5.516 \end{bmatrix}\cdot cm$$

$$a := a_1$$

$$a = 5.516\cdot cm$$

Poiché

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(B)$$

usando la Legge dei Coseni per B otteniamo

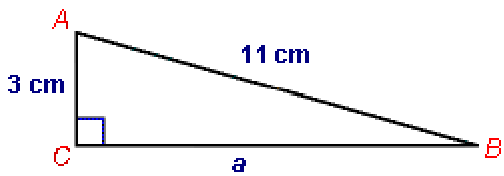
$$B := \pi - \operatorname{acos}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(b^2 - a^2 - c^2)}{(a\cdot c)}\right]$$

$$B = 32.432\cdot deg$$

$$C := 180\cdot deg - A - B$$

$$C = 122.568\cdot deg$$

Esempio 3



Nel caso IC trovare l'altro cateto e gli altri angoli.

$b := 3 \cdot cm$

$c := 11 \cdot cm$

$C := 90 \cdot deg$

Dopo aver trovato il cateto **a** (usando il **Teorema di Pitagora**) ci troveremo nel caso LAL. Da qui si può procedere usando la Legge dei Coseni.

$a := \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = 10.583 \cdot cm$

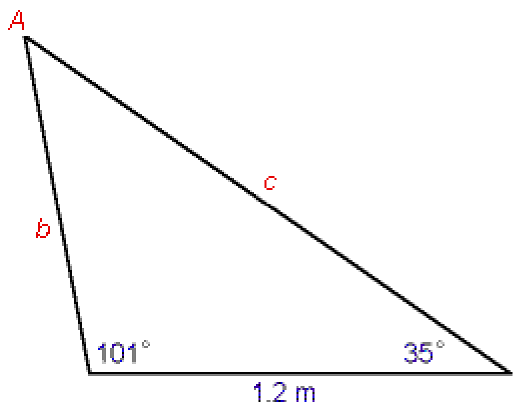
$B := \pi - acos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(b^2 - a^2 - c^2\right)}{(a \cdot c)}\right]$

$B = 15.827 \cdot deg$

$A := 90 \cdot deg - B$

$A = 74.173 \cdot deg$

Esempio 4



Nel caso ALA trovare gli altri lati e l'angolo rimanente.

$a := 1.2 \cdot m$

$B := 35 \cdot deg$

$C := 101 \cdot deg$

Per prima cosa troviamo l'angolo A:

$A := 180 \cdot deg - B - C$

$A = 44 \cdot de$

Usiamo la Legge dei Seni per trovare b e quindi c:

Poiché

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

e

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Risolvendo rispetto a **b** e rispetto a **c** otteniamo

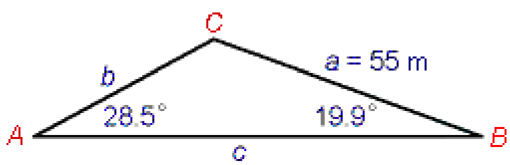
$$b := \sin(B) \cdot \frac{a}{\sin(A)}$$

$b = 1 \cdot m$

$$c := \sin(C)\cdot\frac{a}{\sin(A)}$$

$c = 1.7$

Esempio 5



Nel caso AAL trovare gli altri lati e l'angolo rimanente.

$A := 28.5\cdot deg$

$B := 19.9\cdot deg$

$a := 55\cdot m$

Il terzo angolo è $C := 180\cdot deg - A - B$

Poiché

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

e

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$$

risolvendo rispetto **b** e **c** otteniamo

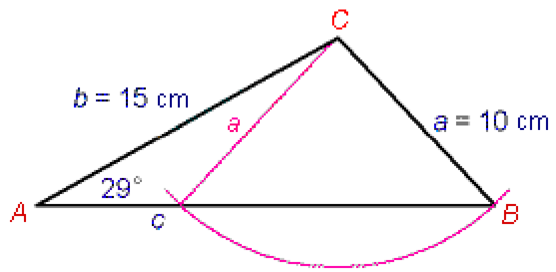
$$b := \sin(B)\cdot\frac{a}{\sin(A)}$$

$b = 39.2$

$$c := \sin(C)\cdot\frac{a}{\sin(A)}$$

$$c = 86.1$$

E' importante comprendere che la situazione LLA è insufficiente per determinare un unico triangolo. Per ottenere una migliore comprensione di ciò, leggiamo attentamente quanto segue.



Nel caso LLA, usiamo la Legge dei Coseni per trovare la possibile lunghezza di **c**.

$$a := 10\cdot cm$$

$$b := 15\cdot cm$$

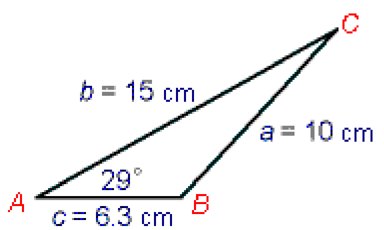
$$A := 29\cdot deg$$

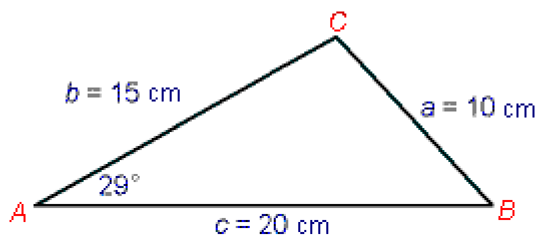
Usando la Legge dei Coseni per trovare **c** otteniamo:

$$c := \begin{bmatrix} b\cdot\cos(A) - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot b^2\cdot\cos(A)^2 + 4\cdot a^2 - 4\cdot b^2} \\ b\cdot\cos(A) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot b^2\cdot\cos(A)^2 + 4\cdot a^2 - 4\cdot b^2} \end{bmatrix}$$

perciò, ci sono 2 differenti soluzioni per **c**! $c = \begin{bmatrix} 6.3 \\ 20 \end{bmatrix}\cdot cm$

e il triangolo può avere 2 forme differenti:

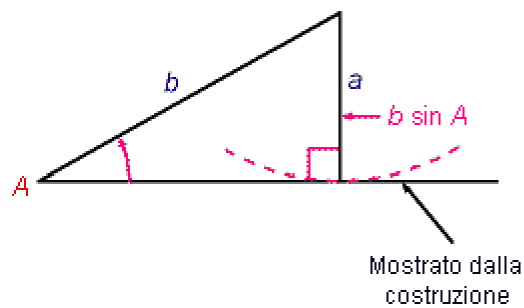




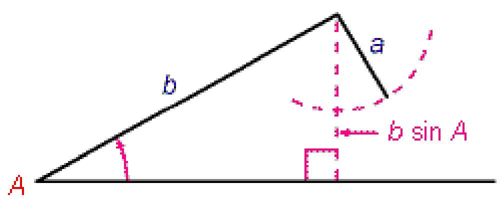
Esiste un modo per determinare quante soluzioni ci possono essere per problemi di tipo LLA. Ci sono i seguenti casi:

Caso 1: A < 90°

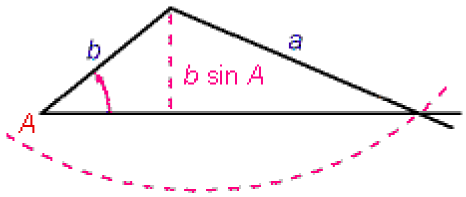
Se $a = b \cdot \sin(A)$, esiste una sola soluzione, un triangolo rettangolo:



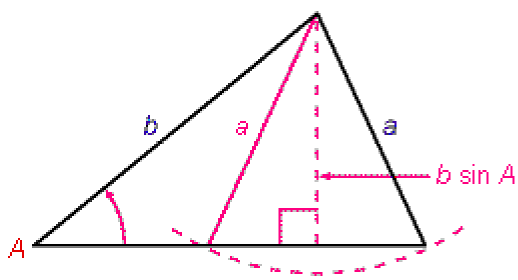
Se $a < b \cdot \sin(A)$, non c'è soluzione:



Se $a > b$ e $a > b \cdot \sin(A)$, c'è una sola soluzione:

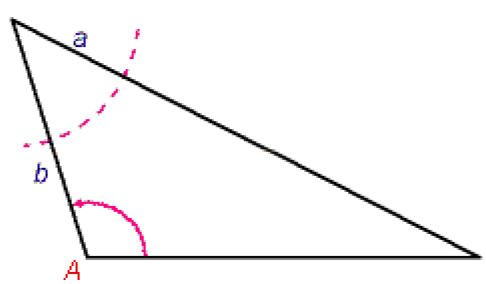


Se $b \cdot \sin(A) < a < b$, ci sono 2 soluzioni:



Caso 2: $A \geq 90°$

Se $a \leq b$, non c'è soluzione:



Se $a > b$, esiste una sola soluzione: