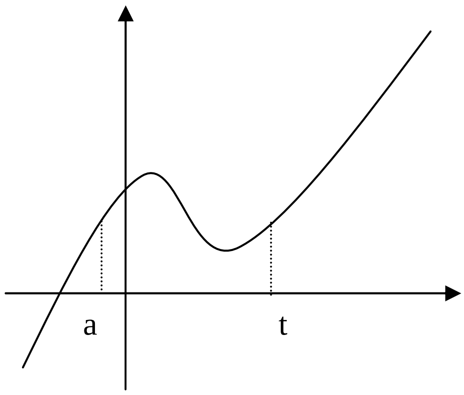
LA FUNZIONE INTEGRALE NEI QUESITI DELL'ESAME DI STATO

Anna Cristina Mocchetti

Le premesse



a) definizione

Assegnata la funzione y = f(x), nell'intervallo [a,t] il suo grafico delimita, con l'asse delle ascisse e con le verticali passanti per a e t, un trapezoide la cui area è data dal calcolo dell'integrale definito

$$\int_a^t f(x)dx\,.$$

Se teniamo fisso il primo estremo a e facciamo variare il secondo estremo t, l'area in questione varia al variare di t; è dunque una funzione di t.

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \text{ è chiamata funzione integrale di f(x)}$$

<u>Osservazione</u>: poiché la variabile indipendente di una funzione è solitamente indicata con *x*, e la variabile di integrazione è una variabile "muta", indichiamo la funzione integrale nel modo usuale:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

b) teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione y = f(t) continua nell'intervallo [a,b], la sua funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ è una sua primitiva. Cioè $F'(x)=f(x)$

c) teorema di De L'Hôpital

[1] caso 0/0

Se due funzioni y = f(x) e y = g(x), definite sullo stesso insieme,

- sono entrambe derivabili,
- per ogni x dell'insieme è g'(x) ≠ 0,
- $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$;
- $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (l può anche essere ∞)

allora risulta $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

[2] caso ∞/∞

Se due funzioni y = f(x) e y = g(x), definite sullo stesso insieme,

- sono entrambe derivabili,
- per ogni x dell'insieme è $g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$;
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l può anche essere ∞)

allora risulta $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

==

Liceo Scientifico di ordinamento 2001- sessione ordinaria - Q2

- Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che f(0)=2.

  Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}$ dove e è la base dei logaritmi naturali.

Soluzione: nel calcolo del limite richiesto ci troviamo nel caso 0/0 dunque poiché le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfano le ipotesi del t. di De L'Hôpital avremo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\text{numeratore})}{\frac{d}{dx}(\text{denominatore})} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2\left(e^x + xe^x\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

==

America Latina 2001- sessione ordinaria - Q7

- Calcolare la derivata rispetto ad x della funzione f(x) tale che $f(x) = \int_0^x te^t dt$, con x>0, dove e è il numero di Nepero.

Soluzione: per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(x) = x \cdot e^x$

Osservazione: avremmo potuto risolvere l'integrale assegnato e determinare f(x) e poi farne la derivata come richiesto. Di seguito i passaggi:

$$f(x) = \int_0^x t \cdot e^t dt = \left[t \cdot e^t - \int e^t dt\right]_0^x = \left[t \cdot e^t - e^t\right]_0^x = x \cdot e^x - e^x + 1$$

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

==

Ordinamento 2001- sessione suppletiva - Q4

- Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che f(0)=1 ed f'(0) = 2. Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$.

Soluzione: nel calcolo del limite richiesto ci troviamo nel caso 0/0 dunque poiché le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfano le ipotesi del t. di De L'Hôpital avremo:

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\text{numeratore})}{\frac{d}{dx}(\text{denominatore})} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{-2\text{sen}2x}$; ma ancora ci troviamo nella forma di indecisione 0/0. Applichiamo nuovamente il t. di De L'Hôpital essendo soddisfatte le sue ipotesi e otteniamo: $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{-4\cos 2x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

==

Ordinamento 2002 - sessione ordinaria - Q7

- Calcolare la derivata rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:

$f(x) = \int_x^{x+1} \ln(t)dt$ con x > 0.

Soluzione: la funzione y = ln(t) è definita e continua in ogni intervallo [x, x+1] con x>0, dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\frac{x+1}{x}$

Osservazione: avremmo potuto risolvere l'integrale assegnato e determinare f(x) e poi farne la derivata come richiesto. Di seguito i passaggi:

$$f(x) = \int_x^{x+1}\ln(t)dt = [t\cdot\ln(t) - t]_x^{x+1} = (x+1)\cdot\ln(x+1) - x - 1 - x\cdot\ln(x) + x$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\cdot\frac{1}{x+1} - \ln(x) - 1 = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\frac{x+1}{x}$$

==

Autonomia 2002 - sessione ordinaria - Q6

- Calcolare la derivata rispetto ad x della seguente funzione: $f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t}dt$ dove e è la base dei logaritmi naturali.

Soluzione: la funzione y = e^{-t} è definita e continua in ogni intervallo [x, x+2], dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(x) = e^{-(x+2)} - e^{-x} = e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$

Osservazione: anche in questo caso, avremmo potuto risolvere l'integrale assegnato e determinare f(x) e poi farne la derivata come richiesto. Di seguito i passaggi:

$$f(x)=\left[-e^{-x}\right]_{x}^{x+2}=-e^{-(x+2)}+e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-(x+2)}-e^{-x}=e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{e^{2}}-1\right)$$

==

P.N.I. e Brocca 2002 - sessione ordinaria - Q4

- Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\operatorname{sen}(t^{3})dt}{x^{4}}$.

Soluzione: nel calcolo del limite richiesto ci troviamo nel caso 0/0; essendo soddisfatte le ipotesi del t. di De L'Hôpital avremo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\operatorname{sen}(t^{3})dt}{x^{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\text{numeratore})}{\frac{d}{dx}(\text{denominatore})}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^{3})}{4x^{3}}$$; ci troviamo nuovamente nella forma di indecisione 0/0. Applichiamo nuovamente il t. di De L'Hôpital essendo soddisfatte le sue ipotesi e otteniamo: $\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2}\cdot\cos(x^{3})}{12x^{2}}=\frac{1}{4}$

==

Sperimentale 2002 - sessione suppletiva - Q5

- Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{3}}\cdot\int_{0}^{x}\frac{t^{2}}{t^{4}+1}dt$.

Soluzione: il limite assegnato si può scrivere $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\frac{t^{2}}{t^{4}+1}dt}{x^{3}}$ che si presenta nella forma indeterminata 0/0; il t. di De L'Hôpital ci permette di superare tale forma di indecisione, ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\frac{t^{2}}{t^{4}+1}dt}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\text{numeratore})}{\frac{d}{dx}(\text{denominatore})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{2}}{1+x^{4}}}{3x^{2}}=\frac{1}{3}$$

==

America Latina 2002 - sessione suppletiva - Q5

- Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)=\int_{0}^{\sqrt{x}}\sqrt{1-t^{2}}dt$.

Soluzione: la funzione assegnata è una funzione composta, essendo l'estremo superiore dell'integrale una funzione di x; $\frac{d}{dx}(f(x))=\sqrt{1-(\sqrt{x})^{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Osservazione: Lo stesso risultato si ottiene con calcoli più laboriosi determinando l'integrale assegnato e poi calcolandone la derivata. Di seguito i passaggi:

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt \quad \text{per sostituzione } t = \text{sen}A \quad dt = \cos A \cdot dA$$

$$= \int \cos^2 A \cdot dA = \int \frac{1+\cos(2A)}{2} dA = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}\text{sen}(2A) = \frac{1}{2}\text{arcsen}(t) + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}$$

Dunque:

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\text{arcsen}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}$$; derivando si ottiene $\frac{d}{dx}(f(x)) = \sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

==

Ordinamento 2003 - sessione ordinaria - Q6:

- La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$ Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare la risposta.

Soluzione: la funzione assegnata è una funzione composta, essendo l'estremo superiore dell'integrale una funzione di x; ponendo $x^2 = g(x)$ si ha $f(x) = \Psi(g(x))$
La derivata di una funzione composta si ottiene: $f'(x) = \Psi'(g(x)) \cdot g'(x)$ e dunque

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = e^{-x^4} \cdot \frac{d}{dx}x^2 = e^{-x^4} \cdot 2x$$

==

P.N.I. e Sperimentali 2003 - sessione straordinaria - Q8:

- Considerata la funzione $f(x) = \int_0^x (1-\ln t)dt$, con x>0, determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

Osservazione: La funzione integranda non è definita in x=0; per determinare f(x) dobbiamo calcolare un integrale improprio:

$$f(x) = \lim_{k\to 0}\int_k^x (1-\ln t)dt = \lim_{k\to 0}[t - t\cdot\ln t + t]_k^x = \lim_{k\to 0}(2x - x\cdot\ln x - 2k + k\cdot\ln k) = 2x - x\cdot\ln x$$

La funzione f(x) determinata è definita per x > 0; gli zeri si determinano risolvendo l'equazione f(x)=0, ossia $x\cdot(2 - \ln x) = 0$ da cui $\ln x = 2$ che implica $x = e^2$.
Per determinare gli intervalli in cui cresce o decresce, studiamo il segno della sua derivata prima:

$$f'(x) = 1 - \ln x \geq 0 \quad \text{da cui} \quad \ln x \leq 1 \quad \text{vera per} \quad 0 < x \leq e$$

f(x) cresce nell'intervallo 0 < x < e; decresce per x > e; per x = e, f'(x) = 0 la curva è stazionaria. Il punto M(e, e) della curva ha la retta tangente orizzontale, esso è un massimo.

==

P.N.I. e Sperimentali 2003 - sessione straordinaria - Q10:

- Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \left(1-e^{-t}\right)dt}{\text{sen}^2 x}$ essendo e la base dei logaritmi naturali

<u>Soluzione</u>: il limite assegnato si presenta nella forma indeterminata 0/0; il t. di De L'Hôpital ci permette di superare tale forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \left(1-e^{-t}\right)dt}{\text{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\text{numeratore})}{\frac{d}{dx}(\text{denominatore})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2\text{senx}\cos x}$$

L'ultimo risultato si presenta ancora nella forma di indecisione 0/0; un'ulteriore applicazione del t. di De L'Hôpital ci permette di ottenere il limite richiesto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2\text{senx}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2\cdot\left(\cos^2 x-\text{sen}^2 x\right)}=\frac{1}{2}$$