Sulle probabilità nel gioco del SuperEnalotto, di Witko - jtosk@libero.it

1 Introduzione.

Un errore che si commette comunemente nel gioco del SuperEnalotto è quello di pensare che la probabilità di realizzare il '6' sia equivalente a quella di realizzare una sestina su una data ruota del lotto.
In altri termini, si pensa che giocando tutte le possibili $\binom{90}{6}$ combinazioni si abbia la certerzza di vincere.

Ciò non è vero, esiste infatti la possibilità, anche se remota, ma contemplata anche dall'articolo 3 del Regolamento SuperEnalotto, di non riuscire a compilare la sestina (combinazione vincente di prima categoria, secondo la terminologia del Regolamento).
Recita infatti la parte finale dell'articolo su citato :
≪ *Se il primo estratto di una ruota sia un numero uguale al primo estratto di una ruota che in ordine alfabetico la precede, ai fini della determinazione dei numeri vincenti, viene preso in considerazione il secondo numero estratto ; se anche il secondo estratto sia un numero uguale al primo estratto di altra ruota che precede, viene preso in considerazione il terzo numero estratto, e così via. La medesima procedura si applica anche nei confronti del numero complementare. Qualora non sia possibile determinare una combinazione vincente di prima categoria con punti 6 o di seconda categoria, con punti 5 più il numero complementare, perché nelle sei ruote utili per l'individuazione del pronostico vengono estratti numeri uguali o per qualsiasi altro motivo, si applica la disposizione prevista al terzo comma dell'art. 14.*≫
Per fare un esempio, si supponga che nelle prime 5 ruote siano usciti i seguenti numeri

BA	FI	MI	NA	PA
6	7	37	67	80

Potrebbe accadere che sulla sesta ruota (Roma), escano i seguenti numeri

ROMA	37	67	6	7	80

In tal caso ovviamente non si riuscirà a compilare la sestina. Quale è la probabilità che avvenga ciò ? È ovviamente pari alla probabilità di fare cinquina su una data ruota al gioco del lotto, e cioè $\dfrac{1}{\binom{90}{5}}$.

2 Probabilità del '6'.

Quanto vale allora la probabilità di fare '6' al SuperEnalotto ?
Introdotti gli eventi

$$⑥ = \text{“Si realizza il ‘6’ al SuperEnalotto”},$$
$$S = \text{“Si riesce a compilare la sestina”}.$$

si ha $⑥ \subset S$, da cui $⑥ = ⑥ \cap S$, da cui segue $P(⑥) = P(⑥ \cap S) = P(⑥|S)P(S)$.
Si ha $P(⑥|S) = \dfrac{1}{\binom{90}{6}} = \dfrac{1}{622614630} \simeq 0.16 \cdot 10^{-8}$, ed è proprio questa la probabilità assegnata (erroneamente) alla realizzazione del '6'. Quella esatta è invece pari a quest'ultima moltiplicata per $P(S)$ (probabilità di realizzare la sestina). Si ha $P(S) = 1 - \dfrac{1}{\binom{90}{5}}$, e quindi

$$\boxed{P(⑥) \equiv p_6 = \frac{1}{\binom{90}{6}} \left[1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right]}$$

che è evidentemente minore di $\dfrac{1}{\binom{90}{6}}$.

Esprimendo in forma decimale abbiamo $p_6 \simeq 0.1606129906 \cdot 10^{-8}$.
Qui è d'obbligo fare una notevole osservazione, e cioè quanto sia minore il premio assegnato (in caso di vincita) rispetto al premio dovuto.
Sappiamo che il premio non è fisso come nel gioco del lotto, ma variabile a seconda delle giocate fatte dagli scommettitori. Anche se i mass-media si affannano a pubblicizzare il premio che all'occhio dei più appare enorme, esso è sempre stato, almeno fino ad oggi, notevolmente inferiore al giusto premio. Chiariamo con un esempio : se una persona scommette 1 euro sull'uscita del '4' nel lancio di un dado, egli pretende (in caso di successo) sei volte la somma versata, ossia poiché la probabilità è $p = \dfrac{1}{6}$, egli fa la normale operazione
1 euro $\times \dfrac{1}{p} = 6$ euro.
Poiché per giocare una colonna (al giorno d'oggi) al SuperEnalotto bisogna pagare 0,50 euro (anche se la giocata minima è di due colonne), e poiché la probabilità di vincita è p_6, il giusto premio è
$0,50 \times \dfrac{1}{p_6} \simeq 311.307.322,1$ euro.
Al contrario la massima vincita che si è avuta al SuperEnalotto è stata di 65.985.105,96 euro (13 agosto 2003 a Veduggio Con Colzano in provincia di Milano) e cioè quasi 5 volte di meno. Senza tener conto poi che tale premio sarebbe potuto benissimo andare diviso tra due o più vincitori.

Bisogna precisare che il discorso che stiamo facendo sarebbe corretto se il gioco del SuperEnalotto fosse limitato alla realizzazione del solo '6'. Poiché il giocatore potrebbe conseguire una vincita diversa, bisogna affrontare il discorso in maniera più globale. È ciò che faremo dopo aver calcolato le probabilità di realizzazione dei vari punteggi.
Passiamo quindi al calcolo delle probabilità di realizzazione del '5', '4', '3' e '5+1'.

3 Le probabilità del '5', '4', '3'.

Quanto vale la probabilità di realizzare '5' al SuperEnalotto ?
Introdotto l'evento

$$⑤ = \text{“Si realizza il ‘5’ al SuperEnalotto”},$$

si ha $P(⑤) = P(⑤ \cap S) + P(⑤ \cap S^c) = P(⑤|S)P(S) + P(⑤|S^c)P(S^c)$.

Inoltre $P(⑤|S) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{84}{1}}{\binom{90}{6}} = \dfrac{504}{\binom{90}{6}}$, questa è la probabilità assegnata (erroneamente) alla realizzazione del '5'.

Si ha poi $P(⑤|S^c) = \dfrac{\binom{5}{5}\binom{85}{1}}{\binom{90}{6}} = \dfrac{85}{\binom{90}{6}}$, e quindi

$$P(⑤) = p_5 = \frac{504}{\binom{90}{6}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) + \frac{85}{\binom{90}{6}}\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{6}}\left\{504 - \frac{419}{\binom{90}{5}}\right\} \simeq 0.8 \cdot 10^{-6}.$$

Proseguiamo analogamente e introduciamo l'evento

$$④ = \text{“Si realizza il ‘4’ al SuperEnalotto”}.$$

Si ha $P(④) = P(④ \cap S) + P(④ \cap S^c) = P(④|S)P(S) + P(④|S^c)P(S^c)$.

La probabilità assegnata (erroneamente) alla realizzazione del ‘4’ è $P(④|S) = \dfrac{\binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}}$. Si ha $P(④|S^c) = \dfrac{\binom{5}{4}\binom{85}{2}}{\binom{90}{6}}$, e quindi

$$P(④) = p_4 = \frac{\binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{2}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{2} - \binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}\binom{90}{5}} \simeq$$

$0.84 \cdot 10^{-4}$.

Introdotto infine l’evento

$$③ = \text{“Si realizza il ‘3’ al SuperEnalotto”},$$

si ha $P(③) = P(③ \cap S) + P(③ \cap S^c) = P(③|S)P(S) + P(③|S^c)P(S^c)$,

da cui $P(③|S) = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}}$, questa è la probabilità assegnata (erroneamente) alla realizzazione del ‘3’. Si ha poi

$P(③|S^c) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{85}{3}}{\binom{90}{6}}$, e quindi

$$P(③) = p_3 = \frac{\binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) + \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{3}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{3} - \binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}\binom{90}{5}} \simeq 0.003.$$

4 La probabilità del ‘5+1’.

Per quanto riguarda la realizzazione del ‘5 + 1’ il discorso si fa più complesso. Bisogna infatti fare per la ruota di Venezia un discorso analogo a quello fatto per la ruota di Roma. Introdotto allora l’evento

$$J = \text{“Si riesce a determinare il numero jolly”},$$

si hanno quattro casi, di cui calcoliamo le probabilità, anche se nel primo e terzo a puro titolo di curiosità perché essi non danno alcun contributo numerico.

1. $S \cap J^c \to$ si riesce a determinare la sestina, ma non il numero jolly. Esempio

BA	FI	MI	NA	PA	RM
6	7	37	67	80	87

e sulla ruota di Venezia,

VENEZIA	37	67	87	7	80

Si ha $P(S \cap J^c) = P(J^c|S)P(S)$, dove $P(J^c|S)$ è pari alla probabilità che sulla ruota di Venezia escano 5 numeri che siano un sottinsieme della sestina, e quindi

$$P(J^c|S) = \frac{\binom{6}{5}\binom{84}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{6}{\binom{90}{5}}, \text{ da cui } P(S \cap J^c) = \frac{6}{\binom{90}{5}}\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)$$

2. $S \cap J \rightarrow$ si riesce a determinare sia la sestina che il numero jolly. Esempio

BA	FI	MI	NA	PA	RM
6	7	37	67	80	87

e sulla ruota di Venezia,

VENEZIA	22	43	1	87	24

Si ha $P(S \cap J) = P(J|S)P(S)$, e poiché $P(J|S) = 1 - P(J^c|S)$ si ha $P(S \cap J) = \left(1 - \frac{6}{\binom{90}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)$

3. $S^c \cap J^c \rightarrow$ non si riesce a determinare né la sestina né il numero jolly. Esempio

BA	FI	MI	NA	PA
6	7	37	67	80

sulla ruota di Roma,

ROMA	37	67	6	7	80

e sulla ruota di Venezia,

VENEZIA	6	80	37	67	7

Si ha $P(S^c \cap J^c) = P(J^c|S^c)P(S^c)$, dove $P(J^c|S^c)$ è pari alla probabilità che sulla ruota di Venezia escano gli stessi numeri della cinquina, e quindi

$$P(J^c|S^c) = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{5}}, \text{ da cui } P(S^c \cap J^c) = \frac{1}{\binom{90}{5}}\frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

4. $S^c \cap J \rightarrow$ si riesce a determinare il numero jolly, ma non la sestina. Esempio

BA	FI	MI	NA	PA
6	7	37	67	80

sulla ruota di Roma,

ROMA	37	67	6	7	80

e sulla ruota di Venezia,

VENEZIA	22	43	1	87	24

Si ha $P(S^c \cap J) = P(J|S^c)P(S^c)$, e poiché $P(J|S^c) = 1 - P(J^c|S^c)$ si ha $P(S^c \cap J) = \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)\frac{1}{\binom{90}{5}}$

Possiamo finalmente calcolare la probabilità di realizzazione del ‘5+1’. Introduciamo allora l’evento

$$⑤^+ = \text{“Si realizza il ‘5+1’ al SuperEnalotto”.}$$

Si ha $P(⑤^+) = P\left[⑤^+ \cap (S \cap J)\right] + P\left[⑤^+ \cap (S^c \cap J)\right] + P\left[⑤^+ \cap (S \cap J^c)\right] + P\left[⑤^+ \cap (S^c \cap J^c)\right]) =$
$P(⑤^+|S \cap J)P(S \cap J) + P(⑤^+|S^c \cap J)P(S^c \cap J) + P(⑤^+|S \cap J^c)P(S \cap J^c) + P(⑤^+|S^c \cap J^c)P(S^c \cap J^c)$.
Calcoliamo inizialmente le varie probabilità condizionate.
$P(⑤^+|S \cap J)$ è la probabilità di realizzare esattamente 5 punti congiuntamente al fatto che il numero non uscito coincida con il numero jolly, nell’ipotesi che si siano determinate sia la sestina che il numero jolly.

Si ha $P(⑤^+|S \cap J) = \frac{\binom{6}{5}\binom{84}{1}}{\binom{90}{6}}\frac{1}{84} = \frac{6}{\binom{90}{6}}$.

$P(⑤^+|S^c \cap J)$ è pari alla probabilità di realizzare il ‘5’ sulla cinquina e il numero rimanente coincida con il numero jolly, e quindi $P(⑤^+|S^c \cap J) = \dfrac{\binom{5}{5}\binom{85}{1}}{\binom{90}{6}} \dfrac{1}{85} = \dfrac{1}{\binom{90}{6}}$.

Ovviamente $P(⑤^+|S \cap J^c) = P(⑤^+|S^c \cap J^c) = 0$ in quanto, non essendo riusciti a determinare il numero jolly, non potrà esistere nessun '5+1'.

Si ha allora $P(⑤^+) = \dfrac{6}{\binom{90}{6}} P(S \cap J) + \dfrac{1}{\binom{90}{6}} P(S^c \cap J)$.

Quanto vale allora la probabilità di fare '5+1' al SuperEnalotto ?

Abbiamo $P(⑤^+) = p_{5+1} = \dfrac{6}{\binom{90}{6}} \left(1 - \dfrac{6}{\binom{90}{5}}\right) \left(1 - \dfrac{1}{\binom{90}{5}}\right) + \dfrac{1}{\binom{90}{6}} \left(1 - \dfrac{1}{\binom{90}{5}}\right) \dfrac{1}{\binom{90}{5}} =$

$\dfrac{1}{\binom{90}{6}} \left(1 - \dfrac{1}{\binom{90}{5}}\right) \left(6 - \dfrac{35}{\binom{90}{5}}\right) = \dfrac{681719243793823}{7074140678798335147360} \simeq 0.9636 \cdot 10^{-8}$

5 Il problema della giusta ripartizione.

Come anticipato all'inizio vogliamo ora indagare sul problema della giusta ripartizione dei premi. Abbiamo visto precedentemente che il premio non è assegnato in maniera equilibrata. Un primo motivo è che esso non viene assegnato in quota fissa come per esempio al gioco del lotto (anche se in modo non equo), bensì in base all'importo del montepremi, che ovviamente può oscillare di volta in volta (anche se quest'ultimo è inferiore alla somma complessiva delle puntate, cfr. art. 8 del Regolamento).
In tal caso vari criteri possono essere adottati. Noi pensiamo che il modo più giusto, una volta stabilito l'ammontare del montepremi comlessivo sia quello di non creare discriminazione tra i vari vincitori. È ovvio che chi realizza il '6' debba ricevere più di chi realizza il '5', ma quanto di più ? In situazione di equità abbiamo già visto che il primo debba ricevere $\dfrac{1}{p_6}$ volte la somma versata, mentre il secondo debba ricevere $\dfrac{1}{p_5}$ volte la somma versata. Siccome ciò non può avvenire, almeno vogliamo fare in modo che la somma s_6 ricevuta dal primo sia pari a $\frac{\frac{1}{p_6}}{\frac{1}{p_5}}$ volte la somma s_5 ricevuta dal secondo, ossia si abbia $s_6 \cdot p_6 = s_5 \cdot p_5$. Tale criterio dovrebbe valere per tutte le categorie di vincitori.
Per affrontare in maniera rigorosa il problema, introduciamo i numeri aleatori

$$N_i = \text{'numero di giocate che realizzano } i\text{'} \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5+1, 6$$

avendosi $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_{5+1} = N =$numero totale delle giocate.
Ovviamente chi realizza un '6' ha realizzato anche dei '5', e così via per gli altri casi ; per questo noi intenderemo tali numeri in senso stretto. Faremo inoltre l'ipotesi semplificatrice che la composizione (da parte dei vari giocatori) delle N giocate siano indipendenti l'una dall'altra. Evidentemente a noi interessano soltanto i numeri $N_3, N_4, N_5, N_6, N_{5+1}$.
Indichiamo con $(n_3, n_4, n_5, n_6, n_{5+1})$ una qualunque realizzazione del vettore aleatorio $(N_3, N_4, N_5, N_6, N_{5+1})$.
Affinché il montepremi complessivo M sia ripartito in modo esatto secondo questo ragionamento, bisognerebbe attendere prima l'estrazione in modo da conoscere il numero dei vincitori delle varie vincite, ossia il numero n_6 dei vincitori del '6', il numero n_5 dei vincitori del '5', il numero n_4 dei vincitori del '4', il numero n_3 dei vincitori del '3', il numero n_{5+1} dei vincitori del '5+1'. Dopodiché, per conoscere le somme vinte, bisognerebbe risolvere il seguente sistema di 5 equazioni nelle 5 incognite $s_6, s_5, s_4, s_3, s_{5+1}$.

$$\begin{cases} n_6 s_6 + n_5 s_5 + n_4 s_4 + n_3 s_3 + n_{5+1} s_{5+1} = M \\ s_6 p_6 = s_5 p_5 = s_4 p_4 = s_3 p_3 = s_{5+1} p_{5+1} \end{cases}$$

Evidentemente l'ente SuperEnalotto non adotta questo sistema, forse perché in tal modo non potrebbe pubblicizzare il (favoloso ?) jackpot che agli occhi di tutti sembra così ricco e che attira l'attenzione di molti giocatori.
Non adottando questa strategia, esso sostituisce al posto dei valori n_i il valore atteso dei numeri aleatori N_i, avendosi, con semplici calcoli $\mathbb{P}(N_i) = N \cdot p_i$, dove N è il numero totale delle giocate. Si ha così che i valori s_i possono essere determinati già prima dell'estrazione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} Np_6s_6 + Np_5s_5 + Np_4s_4 + Np_3s_3 + Np_{5+1}s_{5+1} = M \\ s_6p_6 = s_5p_5 = s_4p_4 = s_3p_3 = s_{5+1}p_{5+1} \end{cases}$$

ottenendo la soluzione $s_6p_6 = s_5p_5 = s_4p_4 = s_3p_3 = s_{5+1}p_{5+1} = \dfrac{M}{5N}$.

Si ha così che il montepremi M_6 destinato ai vincitori del '6' è dato da $\mathbb{P}(N_6) \cdot s_6 = N \cdot p_6 \cdot s_6 = N\dfrac{M}{5N} = \dfrac{M}{5}$. Per gli altri montepremi M_i si ha lo stesso valore, quindi il montepremi complessivo viene diviso in 5 parti uguali, come effettivamente avviene nella realtà (cfr. art.14 del Regolamento). Bisogna segnalare (come indicato dallo stesso articolo) che esiste la possibilità che uno o più valori n_i siano nulli, ossia che in uno o più premi non ci sia nessun vincitore. Esiste anche la possibilità che si abbia $s_i > s_j$, con $i < j$. Tali problemi vengono gestiti in maniera particolareggiata dall'ente. Rinviamo il lettore curioso alla lettura completa dell'articolo 14 dove il problema viene descritto nei minimi particolari. Noi qui abbiamo supposto che tali casi non possano verificarsi. Rinviamo ad altra sede lo studio probabilistico dei vari casi, nonché della giusta ridistribuzione dei montepremi M.

BIBLIOGRAFIA

1. Regolamento del SuperEnalotto.