L'asintoto polinomiale di una funzione razionale

Francesco Daddi - Marzo 2009

Mediante la divisione polinomiale è possibile ricavare informazioni sul comportamento per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ di una funzione razionale; in particolare, è possibile determinare l'equazione del suo asintoto polinomiale. Vediamo alcuni esempi.

Supponiamo di studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 2};$$

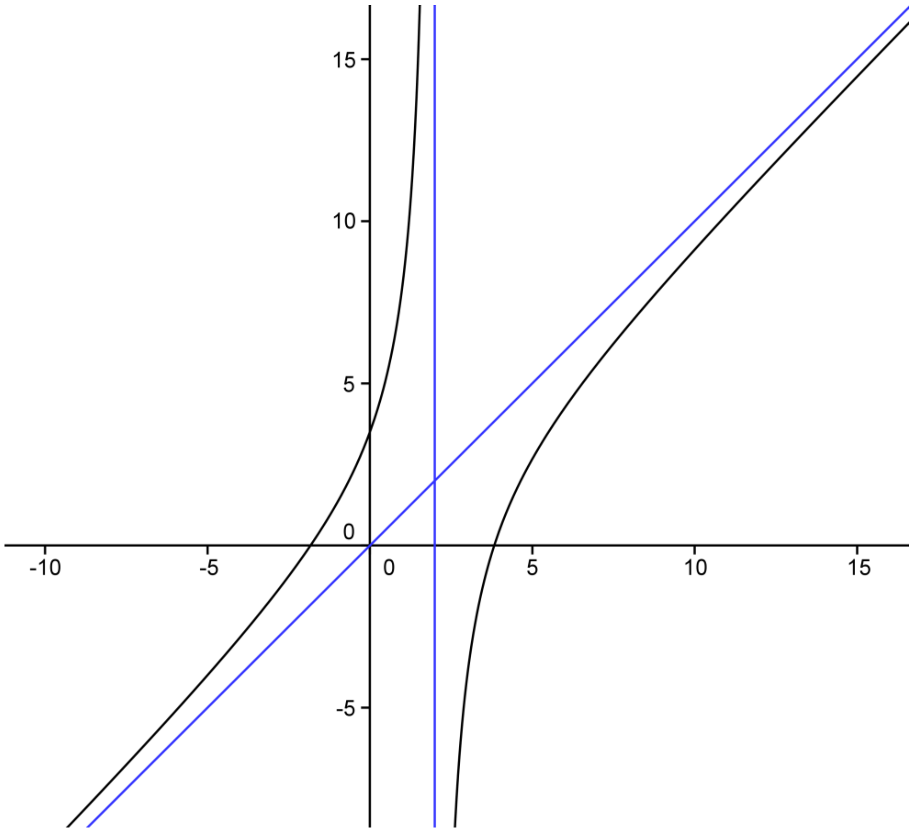
si verifica facilmente che un asintoto verticale è costituito dalla retta di equazione $x = 2$; eseguiamo ora la divisione polinomiale:

$$x^2 - 2x - 7 = (x - 2)x - 7$$

si ottiene quoziente $Q(x) = x$ e resto $R = -7$. La funzione può, quindi, essere riscritta così:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 2} = x - \frac{7}{x - 2};$$

possiamo concludere che la retta $y = x$ è un asintoto per la funzione; non solo, ma possiamo notare che, essendo la quantità $-\frac{7}{x-2}$ è negativa per $x > 2$, la funzione "sta sotto" l'asintoto per $x \to +\infty$. Si veda la figura qui sotto.



Per $x \to -\infty$, invece, la funzione "sta sopra" l'asintoto (il ragionamento è del tutto analogo al precedente; si faccia riferimento ancora alla figura precedente).

Vediamo ora un altro esempio:

$$y = \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4} \ ;$$

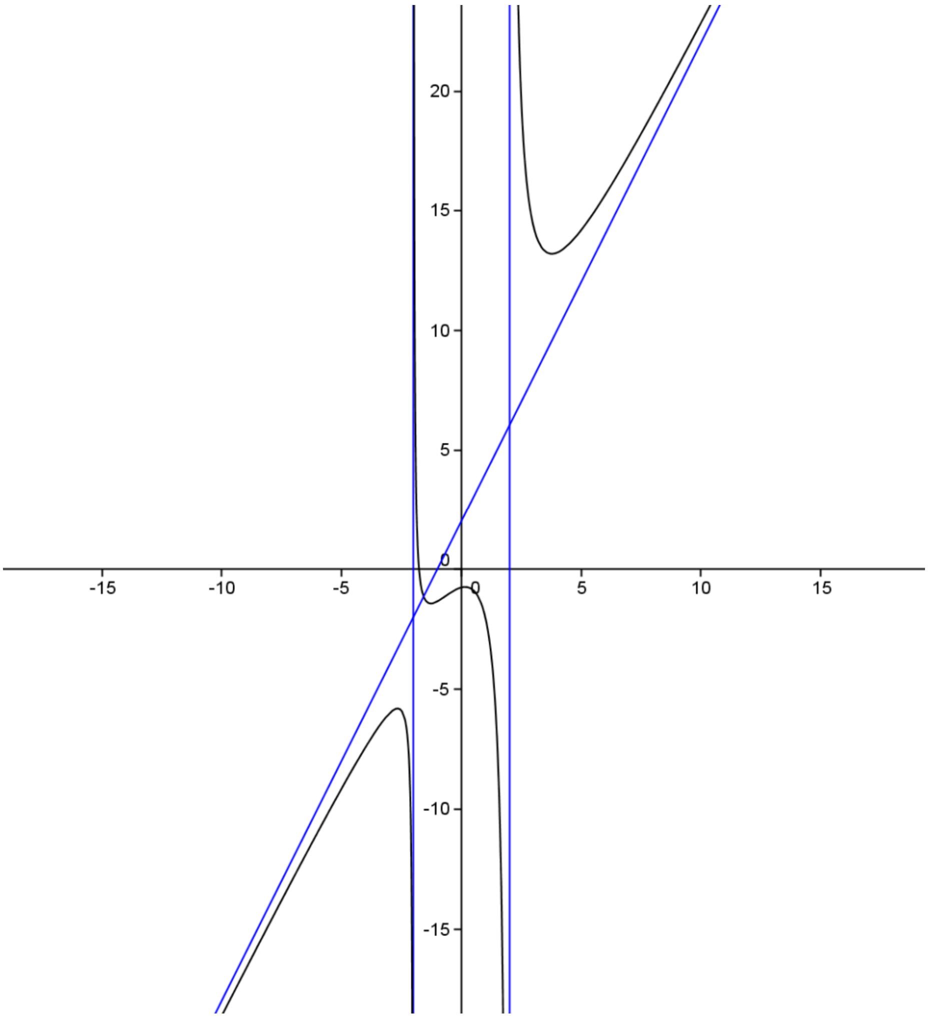
si verifica facilmente che il grafico ha due asintoti verticali, aventi equazioni $x = 2$ e $x = -2$; se calcoliamo il quoziente e il resto con la divisione polinomiale troviamo:

$$2x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x^2 - 4)(2x + 2) + 7x + 11$$

e quindi abbiamo:

$$y = 2x + 2 + \frac{7x + 11}{x^2 - 4} \ .$$

La retta di equazione $y = 2x + 2$ è, perciò, un asintoto; il grafico della funzione "sta sopra" la retta per $x \to +\infty$, mentre il viceversa accade per $x \to -\infty$. Si veda la figura.



Analizziamo ora il caso degli asintoti non lineari. Vediamo ad esempio la funzione

$$y=\frac{x^3-2x+3}{x-1}\ ;$$

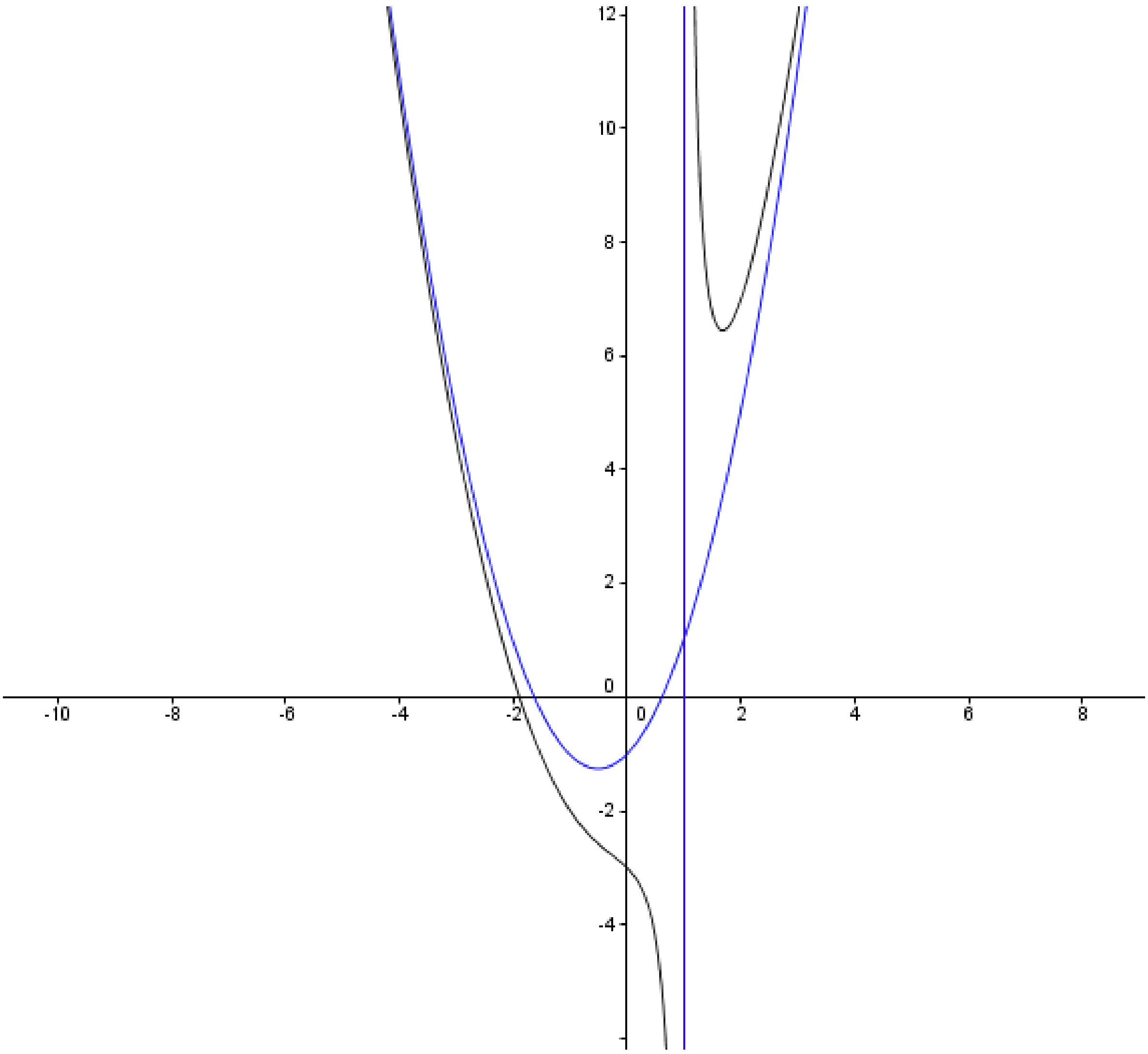
si verifica facilmente che il grafico ha per asintoto verticale la retta di equazione $x=1$. Calcolando il quoziente ed il resto della divisione polinomiale abbiamo:

$$x^3-2x+3=(x-1)(x^2+x-1)+2$$

perciò possiamo scrivere:

$$y=x^2+x-1+\frac{2}{x-1}\ ;$$

il grafico ha per asintoto la parabola di equazione $y=x^2+x-1$.



Per $x\to+\infty$ il grafico della funzione "sta sopra" la parabola, mentre il viceversa accade per $x\to-\infty$.