

Sui sistemi di numerazione posizionali in base qualunque

1) E' noto che gli esseri umani usano, ormai da secoli, il sistema di numerazione po-sizionale in base dieci poiché hanno dieci dita delle mani ¹.

In una sala vi sono 175 sedie, arriva un marziano e, dopo averle contate, scrive 106_x ; quante dita delle mani ha il marziano?

Il numero delle dita del marziano, che indicheremo con x , è la base del sistema di numerazione posizionale che egli usa; x sarà maggiore di 6, poiché 6 è la massima cifra usata dal marziano. Si tratta quindi di trovare per quale valore di x ($x \in \mathbb{N} \wedge x > 6$) risulta $106_x = 175_{10}$. Si deve risolvere l'equazione $6 + 0x + 1x^2 = 175$ da cui $x^2 = 169$ da cui $x = 13$.

2) Trovare, se esiste, una cifra x tale che $x1x_4 = 131_6$.

Essendo 4 la base in cui è scritto il primo numero, x è da cercare nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$. Si tratta di cercare un numero x del suddetto insieme tale che $x + 1 \cdot 4 + x \cdot 4^2 = 1 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 6^2$; risolvendo l'equazione si ottiene $x=3$ che è accettabile poiché appartiene all'insieme suddetto.

2') In modo analogo si risolve il problema di trovare, se esiste, una cifra x tale che $2xx_5 = 120_8$. (*Problema impossibile perché ...*)

3) Trovare, se esiste, una base x tale che risulti $135_x + 46_x = 214_x$.

Il numero naturale x deve essere maggiore di 6, poiché 6 è la massima cifra usata. Deve risultare $5 + 3x + 1x^2 + 6 + 4x = 4 + 1x + 2x^2$, da cui $x^2 - 6x - 7 = 0$ che ha per soluzioni reali i numeri -1 e 7; solo 7 è soluzione accettabile.

4) Trovare, se esiste, una base x tale che risulti $12_x \cdot 25_x = 322_x$.

Il numero naturale x deve essere maggiore di 5, poiché 5 è la massima cifra usata. Deve risultare $(2 + 1x)(5 + 2x) = 2 + 2x + 3x^2$, da cui $x^2 - 7x - 8 = 0$ che ha per soluzioni reali i numeri -1 e 8; solo 8 è soluzione accettabile.

5) Dimostrare che in ogni base b (con $b > 2$) il numero 121 è un quadrato perfetto.

La base b deve essere necessariamente almeno uguale a 3, altrimenti non sarebbe utilizzabile la cifra 2 nella scrittura posizionale del numero. Risulta $121_b = 1 + 2b + 1b^2 = (1 + 1b)^2$, pertanto il numero dato è un quadrato perfetto; esso è il quadrato del numero che in forma posizionale si scrive 11_b , ovvero del successivo della base.

5') In modo del tutto analogo si dimostra che: in ogni base b (con $b > 3$) il numero 1331 è un cubo perfetto.

6) Dimostrare che in un sistema di numerazione posizionale, qualunque sia la base, un numero la cui scrittura termina con la cifra 0 è divisibile per la base e che un numero la cui scrittura termina con due cifre uguali a 0 è divisibile per il quadrato della base.

Sia $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 0$ la scrittura posizionale di un numero che termina con la cifra 0 (in base $b > 1$); il numero stesso, in forma polinomiale, risulta: $0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n$ da cui, raccogliendo a fattor comune b , si ha: $b(a_1 + a_2 b + \dots + a_n b^{n-1})$, da cui si deduce che il numero in questione è divisibile per la base b .

Sia $c_n c_{n-1} \dots c_2 00$ la scrittura posizionale di un numero che termina con due cifre uguali a 0 (in base $b > 1$); il numero stesso, in forma polinomiale, risulta: $0 + 0 \cdot b + c_2 b^2 + \dots + c_n b^n$ da cui, raccogliendo a fattor comune b^2 , si ha: $b^2(c_2 + c_3 b + \dots + c_n b^{n-2})$, da cui si deduce che il numero in questione è divisibile per b^2 .

Francesco Camia

¹ A proposito dell'uso della base dieci o di altre basi nelle varie civiltà e del principio del valore delle cifre a seconda della posizione occupata, si veda Georges Ifrah, Storia universale dei numeri, Arnoldo Mondadori Editore (in particolare i capitoli 2, 27, 30).