LA FUNZIONE INTEGRALE

MAGLIOCURIOSO & CAMILLO

magliocurioso@hotmail.it

SOMMARIO. In questa breve dispensa ho semplicemente trascritto in LaTeX il contenuto di questa discussione:

`http://www.matematicamente.it/forum/studio-della-funzione-integrale-i-vi-t25340.html`

Sono state applicate alcune piccole modifiche esclusivamente per migliorare la leggibilità della dispensa stessa. Nell'augurarvi Buona Lettura vi invito a segnalarmi qualsiasi errore.

INDICE

1. Definizione e prime proprietà

Definizione 1.1. *La funzione integrale è definita come*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{1}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *continua sull'intervallo* $I := [a, b]$[1].

Mediante il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (che d'ora in poi verrà abbreviato con TFCI), nelle ipotesi sopra considerate si può scrivere

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b) \tag{2}$$

ovvero la funzione integrale è continua e derivabile (derivabile solo nei punti in cui f è continua, ovviamente) ed ha come derivata la funzione integranda [2].

La funzione integrale gode inoltre delle seguenti proprietà:

$$F(a) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\, dt = 0 \tag{3}$$

$$F''(x) = f'(x) \quad \forall x \in (a, b) \tag{4}$$

Un estremo dell'integrale della (1) può non essere semplicemente x ma anche una funzione $g\colon J \to \mathbb{R}$, continua e derivabile su un aperto $J := (c, d)$. In tal caso si ha:

$$F(x) := \int_{x_0}^{g(x)} f(t)\, dt \tag{5}$$

oppure

$$F(x) := \int_{g(x)}^{x_0} f(t)\, dt \tag{6}$$

[1] Si osservi che la funzione integranda f può anche essere discontinua in un numero finito o al massimo numerabile di punti. Rilassando al massimo le condizioni cui deve soddisfare la funzione integranda, si può arrivare a dire che l'insieme delle discontinuità della funzione integranda è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue e quindi potrebbe essere anche di cardinalità maggiore del numerabile come ad esempio l'insieme di Cantor.

[2] Il TFCI dimostra la continuità della funzione integrale prima dalla sua derivabilità. Pertano, la notizia della continuità di F andrebbe di logica preposta alla notizia della sua derivabilità anche perché la derivabilità stessa di F è assicurata solo nei punti in cui f è continua.

Per ognuno di questi due ultimi casi si applicano sia il teorema fondamentale del calcolo integrale sia la regola di derivazione delle funzioni composte. Ad esempio per la (7) si ottiene

$$F'(x) = f(g(x))g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \tag{7}$$

Dimostrazione. La dimostrazione della (7) è abbastanza banale. Considerando $F(x)$ composta tramite le funzioni $y := g(x)$ e $G(y) := \int_{x_0}^{y} f(t)\,dt$ si ottiene

$$F(x) = G(g(x))$$

Per il TFCI, la derivata della funzione $G(y)$ risulta essere

$$G'(y) = f(y)$$

ed infine per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

□

Il caso più generale possibile prevede ovviamente che entrambi gli estremi di integrazione siano rispettivamente due funzioni $g_1 \colon J_1 \to \mathbb{R}$ e $g_2 \colon J_2 \to \mathbb{R}$, continue e derivabili sui corrispettivi aperti $J_1 := (c_1, d_1)$ e $J_2 := (c_2, d_2)$. In tal caso si ha

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt \tag{8}$$

ed analogamente

$$F'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x) \tag{9}$$

Esercizio 1.1. *Dimostrare la* (9)

2. Uno schema per lo studio della funzione integrale

Vengono ora forniti alcuni utili suggerimenti per studiare una generica funzione integrale[3].

2.1. **La funzione integranda.** Studiare, prima di tutto, eventualmente anche in modo sommario, la funzione integranda $f(t)$. È utile considerarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti e la sua derivata prima così da poterne tracciare un grafico, anche se qualitativo. In tal modo sarà più facile passare allo studio di $F(x)$ vero e proprio.

[3]Per semplicità di trattazione, nel seguito si fa esplicito riferimento ad una generica funzione integrale nella forma (1) ma ovviamente le considerazioni che seguono sono valide anche per funzioni integrali nelle forme più generali di (5), (6) e (8).

2.2. **Una banale proprietà.** Per quanto possa sembrare piuttosto banale, risulta sempre essere utile tenere ben presente (ed ovviamente applicare correttamente) la proprietà (3).

2.3. **Il segno di $F(x)$.** Studiare, quando è possibile farlo, il segno di $F(x)$ ovvero il segno dell'integrale definito $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. È utile ricordare che l'integrale definito (e quindi $F(x)$) esprime l'area della superficie racchiusa tra l'asse delle ascisse e il diagramma di $f(t)$, relativamente all'intervallo $[x_0, x]$. Questo ovviamente nel caso in cui si ha $f(t) \geq 0$ nell'intervallo considerato.

Se invece, sul medesimo intervallo, si ha $f(t) \leq 0$ allora si arriva a un valore non positivo per $F(x)$. In tal caso (quando il diagramma di $f(t)$ rimane al disotto dell'asse delle ascisse) l'integrale definito esprime l'area della regione, *a meno del segno*.

Se infine $f(t)$ cambia segno in $[x_0, x]$ allora la (1) esprime il risultato della compensazione tra aree positive e negative.

Esempio 2.1. *Sia*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Per la (3) *si ha*

$$F(0) = 0$$

Inoltre, poiché l'area racchiusa tra la curva e l'asse delle ascisse è sempre positiva ne consegue che per la funzione integrale si ha

$$F(x) > 0 \text{ per } x > 0$$

$$F(x) < 0 \text{ per } x < 0$$

Infatti

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = -\int_x^0 e^{-t^2}\,dt$$

Osservazione 2.1. *Quando si presenta il caso*

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{con } b < a \tag{10}$$

spesso si possono semplificare notevolmente i calcoli semplicemente trasformandolo alla seguente maniera

$$-\int_b^a f(t)\,dt \tag{11}$$

In tal modo viene ripristinato il "verso normale di integrazione" in cui l'estremo inferiore di integrazione è minore dell'estremo superiore.

2.4. **I limiti di $F(x)$ [Parte 1].** Calcolare esplicitamente i limiti agli estremi del dominio della funzione integrale, ovvero calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{12}$$

e verificare se l'integrale converge o diverge usando i consueti criteri di convergenza per gli integrali impropri:

- Se l'integrale diverge allora anche $F(x)$ diverge
- Se l'integrale converge, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = l \text{ (finito)} \tag{13}$$

  e in questo caso $F(x)$ ha asintoto orizzontale di equazione $y = l$.

In particolar modo, se si sa calcolare l'integrale improprio allora è possibile determinare l'esatto valore del limite l. Diversamente, bisogna limitarsi alla conoscenza del segno, se esso è deducibile da altre considerazioni (zeri, crescenzae decrescenza della funzione $F(x)$ ecc).

2.5. **I limiti di $F(x)$ [Parte 2].** Qualora la funzione integranda abbia punti di discontinuità, calcolare i limiti della funzione integrale in corrispondenza di tali punti. Se $t = c$ è un punto di discontinuità per $f(t)$ è opportuno distinguere i seguenti casi:

- Se esiste finito il limite destro (sinistro) della funzione integranda la funzione integrale è definita e continua a destra (sinistra)
- Se esiste finito il limite della funzione integranda ma la funzione non è continua in $t = c$ ovvero

$$f(c) \neq \lim_{t\to c} f(t) \tag{14}$$

allora la funzione integrale è continua in $t_0 = c$ [4]. Possiamo pertanto concludere affermando che:

- Quando la funzione integranda $f(t)$ presenta delle discontinuità eliminabili o di prima specie (ovvero esistono finiti i limiti destro e sinistro ma sono diversi) la funzione integrale $F(x)$ relativa ad $f(t)$ è continua.
- Quando si ha a che fare con discontinuità di seconda specie oppure uno dei limiti non esiste allora la cosa si fa problematica e bisogna studiare nello specifico ogni singolo caso. Se ad esempio l'integrale diverge allora $F(x)$ ha un asintoto verticale nel punto $t_0 = c$ e ovviamente, in quest'ultimo caso la funzione $F(x)$ non

[4] Queste considerazioni derivano dal fatto che i punti dell'asse reale hanno misura di Lebesgue nulla. Semplificando al massimo, quello che succede alla funzione integranda in un singolo punto non ha effetto sull'integrale.

è definita per valori $x > c$ (se $c > 0$) in quanto la funzione integrale divergerà.[5].

Esempio 2.2. *Sia*

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t-1}\,dt$$

La funzione integranda presenta un punto di discontinuità per $t = 1$. *Per studiare come si comporta la funzione integrale in quel punto è sufficiente calcolare*

$$F(1) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{e^t}{t-1}\,dt$$

Poiché l'integrale diverge a $-\infty$ *anche* $F(x)$ *diverge a* $-\infty$. *Se ne deduce che* $F(x)$ *non è definita per* $x > 1$ *e che pertanto il suo dominio è*

$$\operatorname{dom} F(x) = \{x \in \mathbb{R}:\ x \in (-\infty, 1)\}$$

2.6. **Ricerca di asintoti obliqui.** Verificare, quando la funzione integrale $F(x)$ diverge a $\pm\infty$ se è dotata di asintoti obliqui calcolando

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{t} \overset{H}{=}{}^{6} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \tag{15}$$

Per poter verificare l'esistenza degli asintoti obliqui bisogna inoltre stabilire se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) - mx = q \tag{16}$$

[5]Nei punti c in cui l'integrando possiede finito il limite destro (sinistro), allora la funzione integrale è sicuramente definita e continua a destra (sinistra). Questo discende proprio dal fatto che i punti dell'asse reale hanno misura di Lebesgue nulla. Se ad esempio si ha

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

e

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

fissato $x = 0$ l'integrale $F(0) = 0$ non è un integrale improprio. Infatti, prescindendo l'integrale di Riemann dal comportamento dell'integrando su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue ed essendo $\{0\}$ un insieme con tale caratteristica, è possibile modificare arbitrariamente il valore di $f(0)$ come ad esmpio prolungare in maniera continua a destra ponendo $f(0) = 1$ senza modificare il valore di $F(0)$. Tutto questo implica che la funzione integrale relativa ad f è continua nei punti c in cui f presenta discontinuità eliminabili o di prima specie. Quando la discontinuità in c è di seconda specie oppure quando uno dei due limiti destro o sinistro della f in c non esiste oppure ancora quando non esistono entrambi possono venir fuori problemi e bisogna prestare maggiore attenzione nello svolgimento dei calcoli.

[6]Per svolgere questo passaggio bisogna applicare la regola di De l'Hopital.

2.7. **Monotonia di $F(x)$.** Calcolare la derivata della funzione integrale applicando la (2). Questo calcolo permette di dedurre i punti di stazionarietà della funzione integrale, gli intervalli di crescenza decrescenza e conseguentemente i suoi punti di max e min relativi o assoluti, gli eventuali punti di cuspide e punti di flesso a tangente verticale: le normali informazioni che si ottengono dallo studio della derivata prima di una funzione.

Se possibile si calcola anche la derivata seconda applicando la (4) mediante la quale si possono determinare quali siano gli intervalli di concavità e di convessità e i punti di flesso della funzione integrale.

3. Un esempio svolto

Seguendo lo schema riportato al capitolo precedente viene ora presentato un esempio svolto e commentato di uno studio di una funzione integrale.

Esempio 3.1. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_2^x \frac{e^t}{\sqrt[3]{t}(t+1)}\, dt$$

3.1. **Studio di $f(t)$.** *Si comincia studiando*

$$f(t) := \frac{e^t}{\sqrt[3]{t}(t+1)}$$

I risultati principali sono:

- $\operatorname{dom} f(t) = \{t \in \mathbb{R} \colon t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)\}$
- $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$
- $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0^+$
- $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$
- $\lim_{t\to 0^-} f(t) = -\infty$
- *Per* $t = 0$ *si ha un asintoto verticale*
- $\lim_{t\to -1^+} f(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to -1^-} f(t) = +\infty$
- *Per* $t = -1$ *si ha un asintoto verticale*
- $f(t) > 0$ *su* $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- $f(t) < 0$ *su* $(-1, 0)$
- $f(t)$ *ha massimo relativo per* $x = \alpha$ *con* $-1 < \alpha < 0$
- $f(t)$ *ha minimo relativo per* $x = \beta$ *con* $\beta > 0$

3.2. **La** (3)**.** *Banalmente* $F(2) = 0$

3.3. **Il segno di $F(x)$.** *Dal grafico di* $f(t)$ *si ottiene:*

$$F(x) > 0 \textit{ per } x \in (2, +\infty)$$

$$F(x) < 0 \textit{ per } x \in (0, 2) \textit{ poiché } \int_x^2 f(t)\,dt = -\int_2^x f(t)\,dt$$

Per $x \in (-1, 0)$ *non è altrettanto facile determinare il segno di* $F(x)$ *perchè non si riesce a determinare se le aree sottese positive e negative si compensino o meno e dove eventualmente questo accada e bisogna pertanto procedere col passo successivo* [7].

3.4. **Limiti di $F(x)$.** *Si calcolano i seguenti limiti (i dettagli sono lasciati al lettore):*

- $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{e^t}{\sqrt[3]{t}(t+1)}\,dt = \infty$
- $F(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \int_2^x f(t)\,dt = -\lim_{x\to 0^+} \int_x^2 f(t)\,dt = \gamma$
- $F(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \int_2^x f(t)\,dt = -\lim_{x\to 0^-} \int_x^2 f(t)\,dt = \gamma$
- $F(0) = \gamma$[8]
- $F(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} \int_2^x f(t)\,dt = -\lim_{x\to -1^+} \int_x^2 f(t)\,dt = +\infty$

Si scopre quindi che $F(x)$ *non è definita per* $x < -1$ *e pertanto*

$$\operatorname{dom} F(x) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \in (-1, +\infty)\}$$

3.5. **Monotonia di $F(x)$.** *Banalmente, per la* (2) *si ha*

$$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$$

Dal suo studio se ne deduce che

- $F'(x) > 0$ *per* $x \in (0, +\infty)$
- $F(x) < 0$ *per* $x \in (-1, 0)$
- *Per* $x = 0$ *si ha un punto di cuspide poiché* $\lim_{x\to 0^\pm} F'(x) = \pm\infty$

Lo studio di $F''(x)$ *viene lasciato al lettore per esercizio*

[7] Però, dall'esame di $F'(x)$ si scopre che $F(x)$ in $(-1, 0)$ è decrescente. Infatti, dovendo decrescere da $+\infty$ fino a un valore negativo per $x = 0$ la funzione taglia l'asse delle ascisse in un punto compreso nell'intervallo $(-1, 0)$.

[8] È stato chiamato γ il valore di convergenza degli ultimi 2 integrali. Si presti particolare attenzione al fatto che vale la condizione $\gamma < 0$

4. Esercizi proposti

Si invita ora il lettore ad esercitarsi coi seguenti esempi proposti [9].

Esercizio 4.1. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := x\int_0^x e^{-y^2}\,dy - \int_1^x ye^{-y^2}\,dy$$

Esercizio 4.2. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2+1}\,dt$$

Esercizio 4.3. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := e^{-x^4} + \int_0^{x^2} t^2e^{-t^2}\,dt$$

Esercizio 4.4. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^{x^2-2x} e^{-t^4}\,dt$$

Esercizio 4.5. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^{x^2-1} e^{-t}\sqrt{t}\,dt$$

Esercizio 4.6. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \frac{e^{-t}(t-1)}{\sqrt{t^2+t+2}}\,dt$$

Esercizio 4.7. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{|t|}}\,dt$$

Esercizio 4.8. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := -x + \int_x^{x+1} +e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

[9] Gli esempi proposti sono gli stessi presentati dagli utenti del forum che parteciparono alla discussione originale reperibile al seguente link `http://www.matematicamente.it/forum/studio-della-funzione-integrale-i-vi-t25340.html`. Il lettore, visionando, il contenuto della medesima discussione troverà numerosi suggerimenti per la loro risoluzione ed in taluni casi lo svolgimento completo.

Esercizio 4.9. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \arcsin \frac{t\,|t|}{t^2+1}\,dt$$

Esercizio 4.10. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

Esercizio 4.11. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{1-t}\ln(3-t)}\,dt$$

Esercizio 4.12. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{e^{t^2}-1}}\,dt$$

Esercizio 4.13. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{x}} \ln\tan t\,dt$$

Esercizio 4.14. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \arctan\sqrt{|1+\ln t|}\,dt$$

Esercizio 4.15. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \frac{2t^2+3t}{\sqrt{t^2+3t+2}}\,dt$$

Esercizio 4.16. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_x^{1-2x} \frac{\cos t}{t+t^2}\,dt$$

Esercizio 4.17. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_1^x \frac{2}{t^2+\sin^2 t}\,dt$$

Esercizio 4.18. *Studiare la seguente funzione integrale*

$$F(x) := \int_0^x \ln(3+\sin|t|)\,dt$$

5. Ringraziamenti

Desidero ringraziare Camillo Enrico e Luca Lussardi del forum `http://www.matematicamente.it/`. Senza la loro preziosa collaborazione questa dispensa non sarebbe ora pubblicamente disponibile.