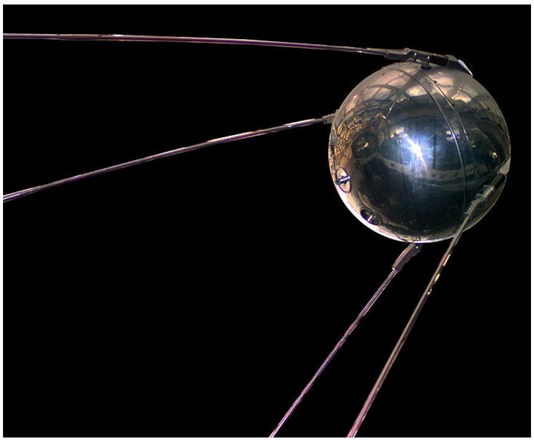
Moto di un satellite: problema kepleriano e perturbazioni orbitali

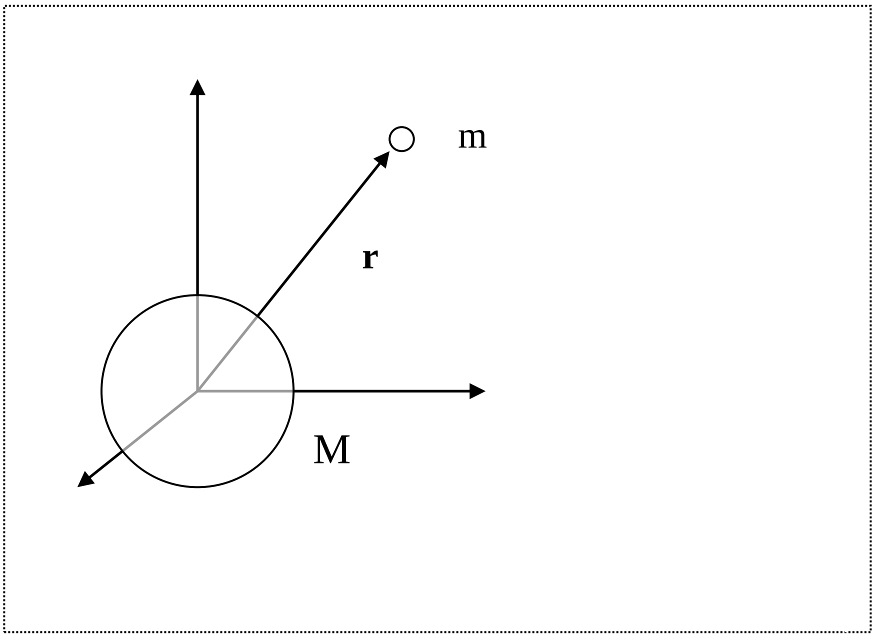
Marco Giancola

Si definisce satellite un qualsiasi oggetto, naturale o artificiale, orbitante attorno ad un corpo celeste. La stessa Terra è un esempio di satellite, in quanto orbita attorno al Sole; così come la Luna, che orbita attorno alla Terra. Il moto dei satelliti artificiali segue le stesse leggi fisiche del moto dei satelliti naturali, con la differenza però che mentre questi ultimi si muovono su orbite relativamente semplici e totalmente predeterminate, le orbite dei satelliti artificiali possono essere "progettate" e sono soggette a controllo ed eventuali mutazioni.



Lo Sputnik 1, il 1° satellite artificiale (© NSSDC, NASA)

Consideriamo il moto di un satellite (naturale o artificiale) di massa m in prossimità di un corpo celeste di massa M molto maggiore di m, ovvero tale che m sia trascurabile rispetto a M. Supponiamo che il corpo celeste sia sferico ed omogeneo (oppure a strati sferici omogenei), in modo da poterlo considerare puntiforme (infatti il campo gravitazionale che un tale corpo genera è uguale a quello che verrebbe generato da una massa pari a M posta nel centro del globo). Ipotizziamo inoltre che sul satellite (il quale, essendo di dimensioni trascurabili rispetto a quelle del corpo celeste, può essere considerato anch'esso puntiforme) agisca esclusivamente l'attrazione gravitazionale del corpo di massa M. In queste ipotesi, studiare il moto del satellite equivale a risolvere il *problema ristretto dei due corpi*, detto anche *problema kepleriano*, che è un caso particolare del *problema dei due corpi*.
La soluzione del problema dei due corpi, che venne posto e risolto da Newton, fornisce la posizione e la velocità di due corpi, le cui masse sono note, che si muovono sotto l'azione della loro mutua forza di attrazione gravitazionale, quando sono note le posizioni e le velocità che assumono ad un certo istante. Tale problema è d'importanza basilare per due motivi principali: innanzitutto esso è l'unico problema di dinamica gravitazionale del quale si abbia una soluzione completa e generale; secondariamente molti problemi pratici riguardanti il moto orbitale di un qualsiasi veicolo spaziale possono essere trattati in modo approssimato con il problema ristretto dei due corpi.
Consideriamo un sistema di riferimento concentrico e solidale con il corpo celeste di massa M, il cui moto è supposto tale da poter considerare tale sistema inerziale. Sia $\vec{r}$ il raggio vettore che individua la posizione del corpo di massa m nel riferimento scelto (come illustrato nel disegno sottostante); indicheremo con $\hat{r}$ il suo versore.



Per la legge di gravitazione universale, la forza che agisce sul satellite è

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{\mu m}{r^2}\hat{r}$$

dove μ = *GM*, ossia il prodotto della *costante di gravitazione universale* per la massa del pianeta, prende il nome di *costante gravitazionale planetaria*. Dalla formula precedente e dalla seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ricaviamo:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

che è la *prima equazione fondamentale dell'astrodinamica*. Per determinare il moto del satellite, occorre integrare la (1) la quale, essendo un'equazione vettoriale differenziale del 2° ordine (equivalente quindi ad un sistema di tre equazioni scalari differenziali del 2° ordine), necessita di sei condizioni iniziali. Se le condizioni sono note tutte all'istante iniziale, ad esempio la velocità iniziale e la posizione iniziale (due condizioni vettoriali equivalenti a sei condizioni scalari), otteniamo un classico *problema di Cauchy*, che ammette un'unica soluzione. Se invece le condizioni sono note in parte all'istante iniziale ed in parte ad un altro istante, otteniamo quello che si chiama *problema di Lambert* o *problema dei due punti*, il quale non è sempre risolvibile.
Premoltiplicando vettorialmente la (1) per $\vec{r}$, otteniamo:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{r} \times \hat{r} = \vec{0}$$

Infatti il campo gravitazionale è un campo centrale: l'accelerazione è diretta sempre come il vettore posizione. Aggiungendo al 1° membro della precedente equazione il termine

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \left(=\vec{0}\right)$$

si ottiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{0}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{0}\Rightarrow\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\overrightarrow{\cos t}\equiv\vec{h}$$

(con $\overrightarrow{\cos t}$ indichiamo una generica costante vettoriale). Quindi il momento angolare (per unità di massa), che abbiamo chiamato $\vec{h}$, è un integrale primo del moto del satellite. Il piano del moto è quello individuato, all'istante iniziale, dal vettore posizione $\vec{r}$ e dalla velocità $d\vec{r}/dt$; pertanto è il piano passante per il centro del corpo celeste ed ortogonale ad $\vec{h}$. Poiché $\vec{h}$ è costante (in modulo, direzione e verso), se ne deduce che anche il piano del moto è costante; quindi il moto kepleriano è un moto piano.
Si può dimostrare che

$$\vec{h}=r^2\vec{\omega}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare con cui il raggio vettore $\vec{r}$ ruota rispetto al riferimento scelto. Quest'ultima espressione ci servirà per ricavare un altro integrale primo del moto del satellite.
Premoltiplichiamo vettorialmente la (1) per $\vec{h}$:

$$\vec{h}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^2}\vec{h}\times\hat{r}=-\mu\vec{\omega}\times\hat{r}$$

Grazie alla formula di Poisson

$$\vec{\omega}\times\hat{r}=\frac{d\hat{r}}{dt}$$

possiamo scrivere:

$$\vec{h}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\mu\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Aggiungendo al 1° membro il prodotto vettoriale nullo $\frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$, abbiamo:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{h}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\mu\frac{d\hat{r}}{dt}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=-\mu\frac{d\hat{r}}{dt}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(-\hat{r}-\frac{1}{\mu}\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\hat{r}-\frac{1}{\mu}\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\overrightarrow{\cos t}\equiv\vec{e}$$

Il vettore $\vec{e}$ prende il nome di *eccentricità*.
Ora, grazie ai due integrali primi trovati, siamo in grado di determinare la geometria della traiettoria del satellite. Moltiplicando scalarmente l'eccentricità per il raggio vettore, otteniamo:

$$\vec{r}\cdot\vec{e}=\vec{r}\cdot\left(-\hat{r}-\frac{1}{\mu}\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=-\vec{r}\cdot\hat{r}-\frac{1}{\mu}\vec{r}\cdot\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=-\vec{r}\cdot\hat{r}-\frac{1}{\mu}\vec{h}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{r}=-r-\frac{1}{\mu}\vec{h}\cdot\left(-\vec{h}\right)=-r+\frac{h^2}{\mu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{r}\cdot\vec{e}+r=\left(\vec{e}\cdot\hat{r}+1\right)r=\frac{h^2}{\mu}$$

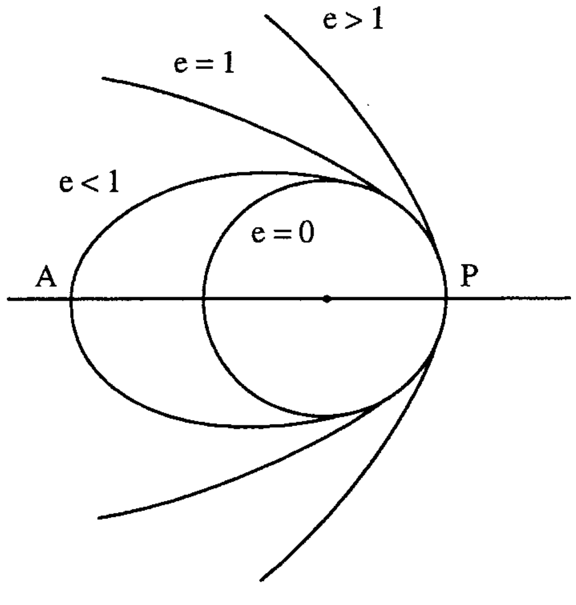
Ponendo:

$$p=\frac{h^2}{\mu}$$

la precedente equazione diventa:

$$r=\frac{p}{1+\vec{e}\cdot\hat{r}}=\frac{p}{1+e\cos v}\qquad(2)$$

dove v è l'angolo formato da $\vec{e}$ ed $\vec{r}$ e prende il nome di *anomalia vera*, mentre la costante p si chiama *parametro*. La (2) è l'equazione parametrica di una conica avente uno dei fuochi nell'origine del sistema di riferimento concentrico e solidale con il corpo celeste che genera il campo gravitazionale. La traiettoria di un satellite sul quale agisce l'attrazione gravitazionale di un unico corpo celeste è dunque una conica di cui il centro del globo occupa uno dei fuochi. Ricordiamo che l'eccentricità e è il parametro geometrico che distingue le coniche in circonferenza ($e = 0$), ellisse ($0 < e < 1$), parabola ($e = 1$) e iperbole ($e > 1$).



Coniche kepleriane

Prendiamo ora in esame l'energia associata a tale moto. Moltiplichiamo scalarmente l'equazione (1) per la velocità $d\vec{r}/dt$ del satellite:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\hat{r}$$

Ponendo:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

il 1° membro dell'equazione può essere scritto nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}V^2$$

mentre il 2° membro è uguale a

$$-\frac{\mu}{r^2}\frac{d}{dt}(r\hat{r})\cdot\hat{r} = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}\cdot\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{r}\right) = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{dr}{dt} + \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\vec{r}\right) = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{dr}{dt} + \vec{\omega}\times\hat{r}\cdot\vec{r}\right) = -\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

Pertanto abbiamo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}V^2 = -\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \cos t \equiv E$$

E è l'energia meccanica totale (per unità di massa) del satellite, pari alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale, le quali dipendono rispettivamente dalla velocità e dalla posizione del satellite. L'energia *E* rimane costante durante il moto e pertanto, per il teorema di conservazione dell'energia meccanica, il campo gravitazionale è un campo conservativo.
Si può dimostrare che

$$E = -\frac{\mu}{2a}$$

essendo *a* la lunghezza del semiasse focale della conica descritta dal moto dell'oggetto orbitante, definita dalla formula

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

Quindi l'energia *E* dipende da tale semiasse (oltre che da μ). Osserviamo che, essendo $p > 0$ (e ovviamente anche $\mu > 0$), si ha:

e	a	E
< 1	> 0	< 0
$= 1$	$= +\infty$	$= 0$
> 1	< 0	> 0

Pertanto, la conica kepleriana è un'ellisse (o una circonferenza), una parabola o un'iperbole a seconda che *E* sia minore, uguale o maggiore di zero. Dalla formula $E = -\mu/2a$ e dall'equazione dell'energia, ottenuta poc'anzi, ricaviamo:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

da cui si ottiene:

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \qquad (3)$$

Se la conica è una circonferenza ($a = r$), la (3) diventa:

$$V_C = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

e fornisce la velocità di un satellite che percorre un'orbita circolare di raggio r intorno ad un corpo celeste il cui centro coincide con quello dell'orbita. Tale velocità prende il nome di *velocità circolare* o *prima velocità cosmica*. Il limite superiore delle velocità circolari è dato dalla velocità (teorica) corrispondente ad un'orbita circolare a quota zero (r è uguale al raggio del pianeta), detta *prima velocità astronautica*, che, nel caso della Terra, è pari a circa 7,9 km/s.
Se, invece, la traiettoria è parabolica ($a = +\infty$), la velocità del satellite è

$$V_P = \lim_{a \to +\infty} \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

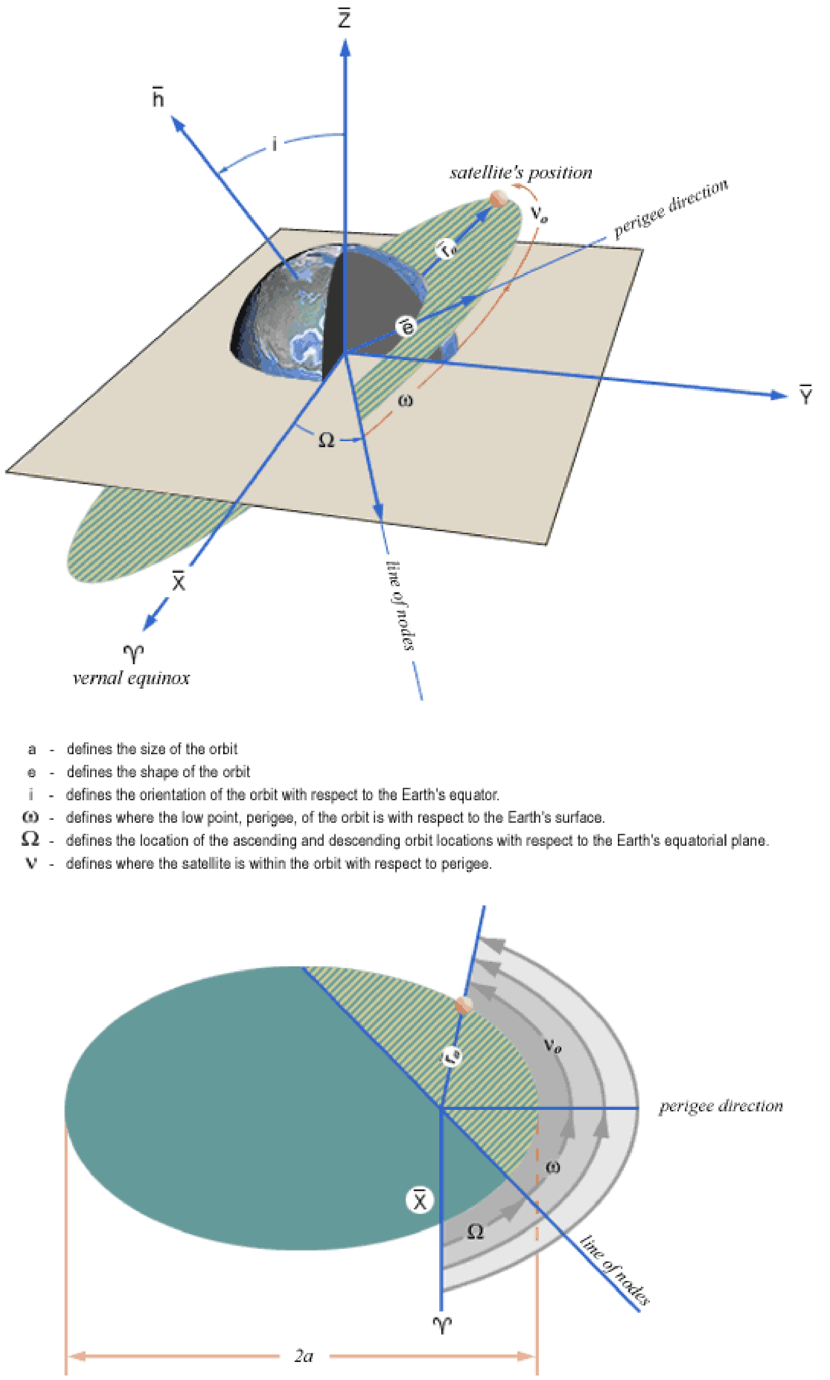
e, a differenza della velocità circolare, non è costante, dato che, in questo caso, $r = r(t)$, ossia r non è costante nel tempo. Il valore che V_P assume al pericentro è detto *velocità parabolica* o *velocità di fuga* o anche *seconda velocità cosmica,* ed è il valore minimo di velocità necessario affinché il satellite riesca a sottrarsi al campo gravitazionale del corpo celeste, allontanandosi indefinitamente da esso. La velocità parabolica a quota zero viene chiamata *seconda velocità astronautica* e, per la Terra, è uguale a circa 11,2 km/s.
La retta intersezione del piano dell'orbita con un piano di riferimento, che solitamente è quello equatoriale, viene chiamata *asse nodale* o *linea dei nodi*. I due punti in cui l'orbita interseca tale asse vengono detti *nodi* e si distinguono in:

- *nodo ascendente*: il punto in cui il satellite attraversa il piano di riferimento transitando dall'emisfero meridionale a quello settentrionale;
- *nodo discendente*: il punto in cui il satellite attraversa il piano di riferimento transitando dall'emisfero settentrionale a quello meridionale.

Introduciamo ora i seguenti tre angoli:

1. *i – inclinazione dell'orbita*: l'angolo formato dai due suddetti piani;
2. ω (da non confondere con $\vec{\omega}$) – *argomento del pericentro*: l'angolo individuato dalla linea dei nodi (orientata verso il nodo ascendente) e da $\vec{e}$;
3. *Ω – ascensione retta del nodo ascendente*: l'angolo compreso tra la linea dei nodi (orientata verso il nodo ascendente) e la semiretta avente origine nel centro del corpo celeste e orientata verso il *punto vernale* (noto anche come *1° punto d'Ariete* o *punto γ*, è uno dei due punti equinoziali in cui l'equatore celeste interseca l'eclittica).

Questi tre angoli, insieme al semiasse maggiore a, l'eccentricità e e l'anomalia vera v, costituiscono i sei *elementi (o parametri) orbitali kepleriani*, che sono i sei parametri necessari per determinare in maniera univoca l'orbita del satellite.



Gli elementi orbitali kepleriani (© NASA)

Noti, ad un generico istante, gli elementi orbitali a, e, i, Ω, ω e v, è possibile determinare posizione e velocità del satellite in quell'istante. Infatti, consideriamo un sistema di riferimento inerziale xyz come quello illustrato nella figura precedente: con l'origine nel centro del pianeta, l'asse x diretto verso il punto γ e l'asse z coincidente con l'asse di rotazione del pianeta e orientato verso il polo nord. Si può dimostrare che il modulo r del raggio vettore dell'oggetto orbitante è ricavabile dalla seguente formula:

$$r = a\left\{1 - e\cos\left[2arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}tg\,\frac{v}{2}\right)\right]\right\}$$

e che le componenti di $\vec{r}$ rispetto al suddetto sistema di riferimento sono:

$$\begin{cases} x = r[\cos\Omega\cos(v+\omega) - \sin\Omega\sin(v+\omega)\cos i] \\ y = r[\sin\Omega\cos(v+\omega) + \cos\Omega\sin(v+\omega)\cos i] \\ z = r\sin(v+\omega)\sin i \end{cases}$$

Orbita del telescopio spaziale Hubble (© NASA)

Le reali condizioni in cui si svolge il moto di un satellite, sia artificiale che naturale (quindi ciò vale anche per i pianeti e altri corpi celesti), non sono però rigorosamente quelle postulate nella trattazione del problema dei due corpi, e quindi l'orbita effettiva di un satellite non è esattamente una conica kepleriana. Ciò è dovuto all'esistenza di vari fenomeni perturbatori, che, nel caso di oggetti orbitanti attorno alla Terra, sono:

- La *non sfericità e non omogeneità della Terra*, che determinano distorsioni del campo gravitazionale terrestre.
- Le *forze gravitazionali perturbatrici* generate dai corpi del Sistema Solare (il Sole, la Luna e i pianeti), i cui effetti sul satellite sono inversamente proporzionali alla sua distanza dal corpo perturbante e direttamente proporzionali alla massa di tale corpo (quindi i più influenti sono il Sole e la Luna).
- Il *drag atmosferico*, ossia l'attrito provocato dall'atmosfera (anche negli strati più esterni dove è molto rarefatta), che è espresso dalla formula $D = C_D \rho A v^2 / 2$, dove C_D è il coefficiente di drag, ρ la densità atmosferica, v la velocità del satellite rispetto all'atmosfera e A l'area della sua sezione trasversale. Si tratta di una forza avente la stessa direzione di $\vec{v}$ ma verso opposto: $\vec{D} = -D\hat{v}$. Il drag presenta effetti molto rilevanti alle basse quote (in particolare, sotto i 1000 km) e determina una riduzione della velocità del satellite, e conseguentemente una diminuzione dell'asse maggiore (e quindi anche della quota), e una circolarizzazione dell'orbita.
- La *pressione della radiazione solare*, che, nonostante sia pressoché infinitesimale (4,57 milionesimi di pascal), a lungo andare può provocare effetti perturbativi (variazioni della velocità del satellite e dell'eccentricità dell'orbita) non trascurabili. Essa, infatti, determina una forza, agente sul veicolo, pari a $F = p(1+r)S$, dove p è la pressione della radiazione solare, S è la superficie del satellite esposta al Sole e r è la riflettanza di tale superficie ($0 \leq r \leq 1$).

Tali fenomeni perturbatori sono rappresentabili matematicamente aggiungendo nell'equazione (1) delle forze che si sommano vettorialmente alla forza d'attrazione gravitazionale. Ovvero, l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r} + \vec{f} \qquad (4)$$

dove con $\vec{f}$ indichiamo la risultante di tutte le forze perturbatrici. Abbiamo visto che, se il moto avviene in condizioni kepleriane, i vettori $\vec{e}$ e $\vec{h}$ rimangono costanti nel tempo. Vediamo ora cosa accade se il moto è perturbato.
Premoltiplichiamo vettorialmente l'equazione del moto per $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{r} \times \hat{r} + \vec{r} \times \vec{f}$$

Poiché si ha:

- $\vec{r} \times \hat{r} = \vec{0}$
- $\vec{h} \equiv \vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

la precedente equazione assume la seguente forma:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f}$$

Abbiamo così ottenuto la *1° equazione delle perturbazioni*.
Ricaviamoci ora $\vec{\omega}$, la velocità angolare con cui il raggio vettore $\vec{r}$ ruota rispetto al riferimento scelto, che nel caso Kepleriano, come abbiamo visto, è pari a $\vec{h}/r^2$.
Consideriamo la formula fondamentale della cinematica:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (5)$$

e premoltiplichiamo vettorialmente entrambi i membri per $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\left(\equiv \vec{h}\right) = \frac{dr}{dt}\vec{r} \times \hat{r} + \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = r^2\vec{\omega} - \left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right)\vec{r}$$

da cui si ottiene:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{h}}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{r^2}\vec{r}$$

che, ponendo:

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{\omega}}{r} = \gamma$$

diventa:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{h}}{r^2} + \gamma\hat{r} \qquad (6)$$

Riconsideriamo ora l'equazione del moto (4) e premoltiplichiamola vettorialmente per $\vec{h}$:

$$\vec{h}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{h}\times\hat{r} + \vec{h}\times\vec{f} \quad (7)$$

Considerando che

$$\vec{h}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

e che

$$\left.\begin{array}{l}(6)\\ \gamma\hat{r}\times\hat{r} = \vec{0}\\ (5)\Rightarrow d\hat{r}/dt = \vec{\omega}\times\vec{r}\end{array}\right\} \Rightarrow -\mu\frac{\vec{h}}{r^2}\times\hat{r} = -\mu\left(\frac{\vec{h}}{r^2} + \gamma\hat{r}\right)\times\hat{r} = -\mu\vec{\omega}\times\vec{r} = -\mu\frac{d\hat{r}}{dt}$$

la (7) diventa:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = -\mu\frac{d\hat{r}}{dt} + \vec{h}\times\vec{f}$$

che si può anche scrivere nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{h}}{\mu}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \hat{r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{1}{\mu}\vec{h}\times\vec{f}$$

Ricordando che

$$\vec{e} \equiv -\hat{r} - \frac{1}{\mu}\vec{h}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

otteniamo:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\vec{h}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{\mu}\vec{h}\times\vec{f}$$

che è la *2° equazione delle perturbazioni*.

I vettori $\vec{e}$ e $\vec{h}$, come sappiamo, individuano la geometria del moto del satellite, e quindi le due equazioni delle perturbazioni ci dicono che, a causa di una forza perturbatrice $\vec{f}$, tale geometria varia nel tempo.
Ovviamente la conoscenza delle forze rappresentative delle perturbazioni orbitali è essenziale per poter conoscere la reale traiettoria dei satelliti. Uno dei procedimenti utilizzati, noto come *metodo delle coordinate*, consiste nel formulare, per ognuna delle suddette forze, un adeguato modello matematico da introdurre nell'equazione del moto (4), la quale verrà poi integrata numericamente. L'integrazione numerica della (4) consente il calcolo delle coordinate della posizione del satellite a istanti regolarmente intervallati, ottenendo in tal modo l'*effemeride* del satellite. Tali coordinate andranno successivamente confrontate con quelle ottenute mediante osservazioni da terra (il cosiddetto *tracking*), per poter stabilire se il modello matematico scelto sia soddisfacente o vada opportunamente modificato.
Per ovviare al problema rappresentato da questi fenomeni perturbatori, i satelliti artificiali hanno in dotazione piccoli propulsori, denominati *thruster*, tramite i quali compiono periodicamente delle manovre che compensano gli effetti delle perturbazioni, impedendo così all'orbita di deformarsi.