FRAZIONI GENERATRICI E NUMERI PERIODICI

Sunto:

si tratta di un lavoro relativo allo studio delle frazioni e dei numeri periodici, in particolare si affronta il problema della ricerca delle frazioni generatrici. I libri di testo non giustificano l'algoritmo che parla "..*di tanti nove quante sono le cifre del periodo e di tanti zeri quante sono quelle dell'antiperiodo*..", ecc. Eppure tutti gli studenti imparano a fare i calcoli senza comprenderne il motivo.
Presenterò tre modalità.
Una introducendo i numeri reali come "scatole cinesi", una con la serie geometrica ed infine una più semplicistica e poco rigorosa.
Si è cercato di rendere più chiaro un particolare aspetto della disciplina. Affrontare tali argomentazioni con la dovuta precisione favorirà sicuramente lo studente nell'acquisizione di contenuti fondamentali della matematica. Le approssimazioni, talvolta necessarie, che si è costretti a compiere rendono più sterile l'insegnamento della stessa e contribuiscono all'errata convinzione che essa sia una materia per pochi eletti.

Roberto Gentile
Insegnante di matematica e informatica presso l'I.PC. "Caracciolo-S.Rosa" di Napoli
roberto.gentile@istruzione.it

Introduzione

I numeri reali e le scatole cinesi

Siano a e b una coppia di numeri razionali con $a \le b$ chiamiamo **numero intervallo** l'insieme [a , b] = { x razionale : $a \le x \le b$ } e definiamo Sc **scatola cinese** una successione di numeri intervallo I_1, I_2, …………, I_n, …….tale che ognuno è contenuto nel precedente e il limite per n che tende all'infinito della loro ampiezza è zero.

Ciò equivale ad affermare che l'estremo inferiore dell'insieme delle ampiezze degli intervalli I_n è zero.

Notiamo che ogni scatola cinese può contenere al più un numero razionale e che ogni espansione decimale definisce una Sc tale che $w(I_n)$ (dove w indica l'ampiezza) è 10^{-n} e gli elementi di I_n sono multipli di 10^{-n} .

Sia S={Sc} classe delle scatole cinesi ed R una relazione di equivalenza così definita:

$(I_n)\ R\ (I'_n) \Leftrightarrow\ I_n \cap I'_n \neq \emptyset\ \ \forall n \in N$

ciò accade se posto $I_n = [\, a_n , b_n \,]$ e $I'_n = [\, c_n , d_n \,]$ per ogni n naturale
$r_n = \max\{a_n , c_n \} \leq \min \{ b_n , d_n \}= s_n$

Dunque, un elemento dell'insieme quoziente S/R è detto **numero reale** ed è chiaramente una classe di equivalenza di S rispetto alla relazione R.

Osserviamo che se r è un numero razionale, la classe (I_n) da essa determinata è data dagli intervalli del tipo $I_n =[r ,r]$ per ogni n naturale. Pertanto si definiscono **razionali** le classi che contengono un numero razionale e **irrazionali** altrimenti.

Facciamo alcuni esempi:

Sc razionale

[0;1] , [0.1; 0.2] , [0.16 ; 0.17] , [0.166 ; 0.167] , ……………..

è una successione che determina 1/6, come si può constatare eseguendo la divisione, mentre

Sc irrazionale

[1;2] , [1.4; 1.5] , [1.41 ; 1.42] , [1.414 ; 1.415] , ……………..

è una successione che determina $\sqrt{2}$. In tal caso si può usare un algoritmo per il calcolo della radice quadrata.

Introduciamo le operazioni aritmetiche e una relazione d'ordine.

Se (I_n) e $(I'_n) \in S$
con $I_n = [\, a_n, b_n]$ e $I'_n =[a'_n, b'_n]$
per ogni n naturale sia $J_n= I_n + I'_n$
$(J_n)=(I_n)+(I'_n)$ $\quad J_n=[a_n+a'_n, b_n+b'_n] \in S$

Siano A e B $\in S/R$ e sia (I_n) un rappresentante di A e (I'_n) un rappresentante di B, si può definire $A+B =((I_n)+(I'_n))$ che risulta essere ben data perché non dipende dalla scelta dei due rappresentanti.

La classe nulla risulta (0), infatti A+(0) = (0)+ A = A, dove (0) è la classe cui appartiene il razionale zero.

L'inverso di $I_n = [\, a_n , b_n \,]$ risulta $-I_n = [\, -b_n , -a_n \,]$, infatti se $A= (I_n)$ e $B= (I'_n)$, A+B= (0) = B+A.

Dunque si verifica facilmente che (S/R, +) è un gruppo abeliano.

Analogamente, siano (I_n) , (I'_n) elementi di S per ogni n naturale definendo

$$J_n = I_n \cdot I'_n = [\, \min (a_n a'_n , a_n b'_n , a'_n b_n , b_n b'_n), \max (a_n a'_n , a_n b'_n , a'_n b_n , b_n b'_n) \,]$$

si avrà $(J_n) = (I_n) \cdot (I'_n)$ in S e si verifica facilmente che " $\cdot$ " è un'operazione associativa e commutativa. La classe unitaria è indicata con (1) e cioè quella classe cui appartiene il razionale 1, infatti

$A \cdot (1) = (1) \cdot A = A$ per ogni A nell'insieme quoziente S/R.
Sia $A([\, a_n , b_n \,]) \neq (0)$ $\quad$ dunque $\forall\, n \in N \quad 0 \notin ([a_n, b_n])$

quindi è lecito definire A^{-1} mediante la posizione: $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right]\right) = A^{-1}$

per cui $(S/R-\{0\}, \cdot\,)$ è un gruppo abeliano, inoltre si verifica facilmente che l'operazione "$\cdot$" è distributiva rispetto alla "+" , quindi $(S/R, +, \cdot\,)$ è un campo.

In esso si può introdurre una relazione d'ordine compatibile con la sua struttura.

Se A e B sono elementi si S/R si dice che A<B quando comunque si considerino due successioni (I_n) in A e (I'_n) in B esiste un m naturale tale che max I_m < min I'_m. In tal modo è facile verificare che S/R risulta strutturato come un campo ordinato archimedeo.

1. La frazione generatrice di una espansione decimale periodica

Nel paragrafo precedente sono state introdotte delle operazioni nell'insieme S/R delle scatole cinesi, dove R era una opportuna relazione d'equivalenza, osserviamo innanzitutto che se si considerano due intervalli [a , b] e [c , d] la loro differenza sarà chiaramente
[a , b] - [c , d] = [a , b] + (- [c , d]) = [a , b] + [- d , - c] = [a - d , b - c]
e notiamo che siccome a - c ≥ a - d e b - c ≥ b - d visto che a ≤ b e c ≤ d, allora si ha che
[a - d , b - c] $\supseteq$ [a - c , b - d] se a - c ≤ b - d oppure
[a - d , b - c] $\supseteq$ [b - d , a - c] se b - d ≤ a - c.
Per cui consideriamo i seguenti esempi:
Esempio n. 1
r = $2.\overline{3}$
r= [2 ; 3] , [2.3 ; 2.4] , [2.33 ; 2.34] , [2.333 , 2.334] , ……
10 r = ~~[20 ; 30]~~ , [23 ; 24] , [23.3 ; 23.4] , [23.33 , 23.34] , ……
consideriamo gli intervalli di pari ampiezza partendo da quelli di misura 1 e trascurando quelli di ampiezza superiore.
Così si ottiene
10 r - r = 9 r = [23 - 2 , 24 -3] , [23.3 - 2.3 ; 23.3 - 2.3] ………. = [21 ; 21] , ……….= 21
da cui 9 r = 21 , quindi r = 21/9 .

Esempio n.2
s = $4.\overline{56}$
s = [4 ; 5] , [4.5 ; 4.6] , [4.56 ; 4.57] , [4.565 ; 4.566] , [4.5656 ; 4.5657] , ……
10 s = ~~[40 ; 50]~~ , [45 ; 46] , [45.6 ; 45.7] , [45.65 ; 45.66] , [45.656 ; 45.657] , ……
100 s = ~~[400 ; 500~~] , ~~[450 ; 460] ,~~ [456 ; 457] , [456.5 ; 456.6] , [456.56 ; 456.57] , ……
similmente a quanto visto nell'esempio n. 1, si ha
100 s - s = [456 - 4 ; 457 - 5], [456.5 - 4.5 ; 456.6 - 4.6] , ………. = [452 ; 452] = …….= 452
da cui 99 s = 452 , quindi s = 452/99 .

Esempio n. 3
Analogamente agli esempi precedenti
t = $5.\overline{478}$
quindi si avrà che t = $\frac{5478-5}{999}=\frac{5473}{999}$.

Nel caso di un numero periodico semplice, risulta chiaro, quindi, l'algoritmo che indica di riportare al denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo e di riportare al numeratore la differenza tra il numero intero ottenuto dalle sue cifre e la sua parte intera.

Esempio n. 4
u = $4.5\overline{6}$
u = [4 ; 5] , [4.5 ; 4.6] , [4.56 ; 4.57] , [4.566 ; 4.567] , [4.5666 ; 4.5667] , ……
10 u = ~~[40 ; 50]~~ , [45 ; 46] , [45.6 ; 45.7] , [45.66 ; 45.67] , [45.666 ; 45.667] , ……
100 u = ~~[400 ; 500]~~ , ~~[450 ; 460]~~ , [456 ; 457] , [456.6 ; 456.7] , [456.66 ; 456.67] , ……
quindi
100 u - 10 u = 90 u = [456 - 45 ; 457 - 46] , [456.6 - 45.6 ; 456.7 - 45.7] , …………= [411, 411], ……….. = 411
da cui 90 u = 411, quindi u = 411/90 , si perviene immediatamente ad una successione costante.

Infatti, nel caso di numeri periodici misti si ha la seguente descrizione: la frazione generatrice si ottiene indicando al denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo e tanti zeri quante sono quelle dell'antiperiodo (per antiperiodo sono intese le cifre della parte decimale tra il punto e il periodo) e al numeratore la differenza tra il numero intero ottenuto da tutte le sue cifre e l'intero ottenuto dalle cifre che precedono il periodo.

Esempio n. 5
v = $5.4\overline{78}$
v = [5 ; 6] , [5.4 ; 5.5] , [5.47 ; 5.48] , [5.478 ; 5.479] , [5.4787 ; 5.4788] , ……
10 v = ~~[50 ; 60]~~ , [54 ; 55] , [54.7 ; 54.8] , [54.78 ; 54.79] , [54.787 ; 54.788] , ……
100 v = ~~[500 ; 600]~~ , ~~[540 ; 550]~~ , [547 ; 548] , [547.8 ; 547.9] , [547.87 ; 547.88] , ……
1000 v = ~~[5000 ; 6000]~~ , ~~[5400 ; 5500]~~ , ~~[5470 ; 5480]~~ , [5478 ; 5479] , [5478.7 ; 5478.8] , [5478.78 ; 5478.79] , ……….
Similmente all'esempio n. 4, calcolo
1000 v - 10 v = [5478 - 54 ; 5479 - 55] , [5478.7 - 54.7 ; 5478.9 - 54.8] , ……….. = 5424
da cui 990 v = 5424, quindi v = 5424 / 990.

Infine, quando la periodicità è uguale a 9, si ha:

Esempio n. 6

Se z = $7.\overline{9}$

procedendo come prima si ottiene: z = $\frac{79-7}{9} = \frac{72}{9} = 8$

sembra più interessante osservare che

z = [7 ; 8] , [7.9 ; 8] , [7.99 ; 8] , …………
e 8 è proprio un razionale che appartiene a tutti gli intervalli di tale scatola cinese, pertanto z = 8.

Notiamo, in generale che se r è un numero decimale, sarà nella forma

$r = n, a_1a_2\ldots\ldots a_k\ p_1p_2\ldots\ldots p_m$

dove n è la parte intera, con k cifre di antiperiodo e m cifre di periodo

dunque $10^k \cdot r = n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k\ ,\ p_1p_2\ldots\ldots p_m$

$10^{k+m} \cdot r = n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k\ p_1p_2\ldots\ldots p_m\ ,\ p_1p_2\ldots\ldots p_m$

$10^{k+m} \cdot r - 10^k \cdot r = 10^k \cdot r\ (10^m - 1) = 99\ldots\ldots9 \cdot 100\ldots.0 \cdot r$

(con m volte 9 e k volte 0)=

$= n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k\ p_1p_2\ldots\ldots p_m\ ,\ p_1p_2\ldots\ldots p_m - n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k\ ,\ p_1p_2\ldots\ldots p_m$

in definitiva

$$r = \frac{n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k\ p_1p_2\ldots\ldots p_m - n\ a_1a_2\ldots\ldots a_k}{99\ldots\ldots900\ldots\ldots0}$$

Se k = 0 il numero è periodico semplice e si ha:

$$r = \frac{n\ p_1p_2\ldots\ldots p_m - n}{99\ldots\ldots9}$$

Esempio

x = $7,493\overline{57}$

k= 3, m=2

$$r = \frac{749357 - 7493}{99000}.$$

2. La frazione generatrice e la serie geometrica

Sia $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots\ldots$ una serie reale di termine iniziale a_0 e dove $q = a_1/a_0 = a_2/a_1 = a_{n+1}/a_n$ per ogni n naturale, si può scrivere $a_0\ (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n + \ldots\ldots\ldots)$, avendo ottenuto la serie geometrica di ragione q che è convergente se $|\ q\ | < 1$.

Inoltre, essendo $s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ la somma parziale di ordine n.

La somma della serie è data da s = $\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_0}{1-q}$.

Quindi considerando l'esempio precedente

$$r = 2.\overline{3} = 2+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+................ = 2+3\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...........\right) =$$

$= \ 2+3\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{p} = 2+3(s'-1)$ dove s' è la somma della serie geometrica di ragione 1/10 , quindi

$$r = 2.\overline{3} = 2+3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right) = \frac{7}{3}.$$

Comunque, anche senza fare ricorso alle serie l'argomento può essere affrontato con una certa approssimazione limitandosi a considerare le somme parziali. Infatti, se nella precedente espressione sostituiamo alla $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{p}$ la sua ridotta n-esima $\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{p} = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}-1\right)$ si può facilmente far comprendere che all'aumentare di n il termine $\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$ tende rapidamente a zero e può essere trascurato nella ricerca della frazione generatrice. In tal modo non si fa ricorso esplicitamente al concetto di limite e si rischia di lasciare qualche perplessità.

Infine, l'algoritmo riportato comunemente nei libri scolastici lo si può intuire facilmente anche se si osservano i seguenti esempi:
nel caso dei periodici semplici
$a = 2.\overline{3} =$

$$2+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+...... = 2+\frac{3/10}{1-\frac{1}{10}} = 2+\frac{3}{9} = \frac{2\cdot 9+3}{9} = \frac{2(10-1)+3}{9} = \frac{23-2}{9} = \frac{7}{3},$$

mentre nel caso dei periodici misti

$$b = 3{,}2\overline{1} = 3{,}2+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+....... = 3{,}2+\frac{1/100}{1-\frac{1}{10}} = 3{,}2+\frac{1}{90} =$$

$$= \frac{3{,}2\cdot 90+1}{90} = \frac{3{,}2(100-10)+1}{90} = \frac{321-32}{90} = \frac{289}{90}.$$

3. Allineamenti decimali infiniti

La ricerca della frazione generatrice di una espansione decimale può anche essere affrontata dopo aver definito i numeri reali attraverso gli allineamenti decimali infiniti. Infatti, sia per esempio

r = 7,(9)= 7,999…… 10 r = 79,999…..
quindi 9 r = 79,999….- 7,999….. = 79-7 = 72 da cui r = 72/9=8;
oppure nel caso
s = 4,(56) = 4,565656….. 100 s = 456,565656……
quindi
100 s - s = 99 s = 456,5656...- 4,565656…= 456 - 4 = 452 da cui s = 452/99;
e se
t = 2, 3(7) = 2,3777….. 10 t = 23,777… 100 t = 237,777…
quindi
100 t -10 t = 90 t = 237,777… - 23,777… = 237 - 23 = 214 da cui t = 214/90.

Per cui con le dovute cautele il problema si può risolvere formalmente in maniera più rapida. Lavorare, però, sugli allineamenti decimali infiniti può indurre lo studente a commettere errori del seguente tipo:
7,(2) - 5, (4) = 1, (8) !!! anziché 1,(7).

BIBLIOGRAFIA

BIACINO L., Corso di perfezionamento "Didattica della matematica, Università degli studi "Federico II", Napoli, a.a. 1997/98.
BOYER C.B., Storia della matematica, A.Mondadori, Milano, 1980.
DODERO N.-BARONCINI P.-TREZZI D., Elementi di matematica vol.1 Algebra geometria informatica per il biennio delle scuole superiori, Ghisetti e Corvi editori, Milano, 1994.
DODERO D.-BARONCINI P.-TREZZI D., Elementi di matematica vol.5 Per gli istituti tecnici industriali ad indirizzo sperimentale, Ghisetti e Corvi editori, Milano, 1990.
IFRAH G., Storia universale dei numeri, Mondadori De Agostini, Novara, 1995
PELLEREY M., Aritmetica costruiamo la matematica per la scuola media, Sei editrice, Torino, 1995.
SPERANZA F., Matematica per gli insegnanti di Matematica , Zanichelli, Bologna, 1987.