Liceo Scientifico G. Stampacchia
Tricase

Tempo di lavoro
100 minuti

Oggetto: compito in classe 1D

Argomenti: **Calcolo letterale**- Monomi: MCD, m.c.m..Operazioni. Polinomi: somma algebrica, prodotti, prodotti notevoli. Logica - Analisi di proposizioni – **Geometria piana**: Problemi sull'applicazione del primo criterio di congruenza. Problema di primo grado sugli angoli.

Termini Principali

Algebra: Monomio, Grado, Massimo Comun Divisore (MCD)- minimo comune multiplo (m.c.m.)- Polinomio- Quadrato di un polinomio- Cubo di un binomio.

Geometria: Angolo, bisettrice di un angolo, Punto medio di un segmento, Triangolo isoscele, Angoli alla base - Primo Criterio di congruenza.Somma angoli interni di un triangolo.

Links per la navigazione
soluzione
Algebra
Es_1 Sol_1.1 Sol_1.2
Es_2 Sol_2_1 Sol_2_2
Sol_2_3 Sol_2_4
Geometria
Problema_1 Dim.Tesi
Problema_2
Tesi_1 Tesi_2 Tesi_3
Problema_3
Prima_parte,Seconda_parte
Valutazione Esercizi

Algebra

Es_1)

1.1 Dati i monomi

$4a^{n-1}b^3$, $-18a^{4-n}b^n$, $12a^3b^{2n-1}$

stabilire per quali valori di $n \in N$ sono tutti interi e determinare per ciascuno dei valori ammissibili il MCD ed il m.c.m. del gruppo. Organizzare il lavoro utilizzando una tabella come quella indicata a lato.

n	$4a^{n-1}b^3$	$-18a^{4-n}b^n$	$12a^3b^{2n-1}$	MCD	m.c.m.

1.2 Dopo aver risolto il precedente quesito determinare il valore di verità della seguenti proposizioni:

- P_1=" Il MCD ha grado maggiore o uguale a 2 in ogni caso"
- P_2="Il m.c.m. ha grado maggiore o uguale a 6 in ogni caso"
- P_3="Solo per un valore di **n** il m.c.m. ha grado maggiore di 6"
- P_4="Il MCD ha grado minore o uguale a 4"
- P_5="Il m.c.m. ha grado minore o uguale a 9"

Es_2) Semplificare le seguenti espressioni letterali:

2.1 $$\left[\left(\frac{3}{4}a^2b^{-1}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}a^{2-n}b^{n-1}\right)^3\right]\cdot\left(3a^{-2n+1}b^{2-n}\right)^2$$

2.2 $$(a-1)^2(a+1)^2-(a^2-a-1)(a^2+a-1)$$

2.3 $$(x^2-xy)^3(x^2+xy)+(-x^2+xy)^3xy$$

2.4 $$\left[(a-2b)^2-4b^2\right]^2-(a^2-ab+2b^2)^2$$

Geometria

Problema_1- Dato l'angolo acuto $\measuredangle aOb$, si prenda sul lato a il punto A e sul lato b il punto B in modo che i segmenti AO, BO siano congruenti. Tracciata la bisettrice dell'angolo $\measuredangle aOb$ e preso su di essa un punto P diverso dal vertice dell'angolo, dimostrare che AP≅BP.

Problema 2- Dato il triangolo ABC isoscele su AB, siano M ed N rispettivamente i punti medi dei lati BC, AC ed O il punto d'intersezione delle mediane AM, BN. Dimostrare:

2.1 che i triangoli ABM, ABN sono congruenti;
2.2 che il triangolo AOB è isoscele;
2.3 che i triangoli AON, BOM sono congruenti.

Problema 3- Nel triangolo ABC per le ampiezze degli angoli interni è noto che $\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{A}$, $\hat{C} = \frac{3}{4}\hat{B}$. Determinare le ampiezze dei tre angoli interni.

Stabilire di quanto dovrebbe aumentare l'ampiezza dell'angolo maggiore affinché la sua misura uguagli il doppio della somma delle misure degli altri due.

Torna all'inizio

Soluzione

Algebra

Es_1) Ricordiamo che un monomio si dice intero se le lettere in esso contenute presentano esponenti non negativi. Ciò premesso, osservando gli esponenti si ricava immediatamente che devono essere soddisfatte contemporaneamente le seguenti disuguaglianze:

n-1≥0 ⇒n≥1;

4-n≥0 ⇒ n≤4;

2n-1≥0 e questa è soddisfatta ∀n≥1

Pertanto i valori naturali di **n** che verificano le tre condizioni sono gli elementi dell'insieme {1;2;3;4}.

Riportiamo dunque in tabella le espressioni dei monomi così come si presentano al variare di **n**. Nella stessa tabella sono indicati anche MCD e m.c.m. per ciascuno dei quattro valori ammissibili.

n	$4a^{n-1}b^3$	$-18a^{4-n}b^n$	$12a^3b^{2n-1}$	MCD	m.c.m.
1	$4b^3$	$-18a^3b$	$12a^3b$	$2b$	$36a^3b^3$
2	$4ab^3$	$-18a^2b^2$	$12a^3b^3$	$2ab^2$	$36a^3b^3$
3	$4a^2b^3$	$-18a\,b^3$	$12a^3b^5$	$2ab^3$	$36a^3b^5$
4	$4a^3b^3$	$-18\,b^4$	$12a^3b^7$	$2b^3$	$36a^3b^7$

Analisi delle proposizioni

- P_1=" Il MCD ha grado maggiore o uguale a 2 in ogni caso"
  E' falsa perché per n=1 il grado del MCD è 1.
- P_2="Il m.c.m. ha grado maggiore o uguale a 6 in ogni caso"
  E' vera.
- P_3="Solo per un valore di *n* il m.c.m. ha grado maggiore di 6"
  E' falsa perché il m.c.m. ha grado maggiore di 6 per due valori di n: n=3, n=4.
- P_4="Il MCD ha grado minore o uguale a 4"
  E' vera
- P_5="Il m.c.m. ha grado minore o uguale a 9"
  E' falsa. Infatti, per n=4 il m.c.m. ha grado 10.

Torna all'inizio

Es_2)

2.1
$$\left[\left(\frac{3}{4}a^2b^{-1}\right)^2:\left(-\frac{3}{2}a^{2-n}b^{n-1}\right)^3\right]\cdot\left(3a^{-2n+1}b^{2-n}\right)^2=$$
$$\left[\left(\frac{9}{16}a^4b^{-2}\right):\left(\frac{-27}{8}a^{6-3n}b^{3n-3}\right)\right]\cdot 9a^{-4n+2}b^{4-2n}=$$
$$\frac{-1}{6}a^{-2+3n}b^{1-3n}\cdot 9a^{-4n+2}b^{4-2n}=\frac{-3}{2}a^{-n}b^{5-5n}$$

2.2 $$(a-1)^2(a+1)^2-(a^2-a-1)(a^2+a-1)=(a^2-1)^2-\left[(a^2-1)^2-a^2\right]=a^2$$

2.3
$$\left(x^2-xy\right)^3\left(x^2+xy\right)+\left(-x^2+xy\right)^3xy=$$
$$\left(x^2-xy\right)^2\left(x^4-x^2y^2\right)+(-x^6+3x^5y-3x^4y^2+x^3y^3)xy=$$
$$\ldots\ldots\ldots=(x^8-2x^7y+2x^5y^3-x^4y^4)-x^7y+3x^6y^2-3x^5y^3+x^4y^4=$$
$$x^8-3x^7y+3x^6y^2-x^5y^3.$$

2.4 $\left[\left(a-2b\right)^2-4b^2\right]^2-\left(a^2-ab+2b^2\right)^2=$

$\left(a^2-4ab+4b^2-4b^2\right)^2-\left(a^4+a^2b^2+4b^4-2a^3b+4a^2b^2-4ab^3\right)=$

$.........=-6a^3b+11a^2b^2+4ab^3-4b^4$

Torna all'inizio

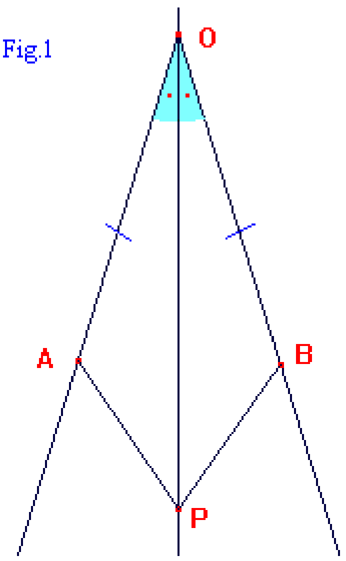
Geometria

Problema_1

La figura richiesta dal problema è rappresentata in Fig.1.

Considerando i due triangoli AOP, BOP si vede che sono congruenti per il primo criterio. Infatti, hanno il lato OP in comune, i segmenti AO, BO congruenti per ipotesi e gli angoli AOP, BOP congruenti perché ottenuti bisecando l'angolo AOB con la bisettrice. Pertanto i due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso e quindi sono congruenti. Da ciò discende che sono congruenti anche i due lati AP, BP.

Fig.1



Torna all'inizio

Problema_2

La figura richiesta dal problema è riportata i Fig.2

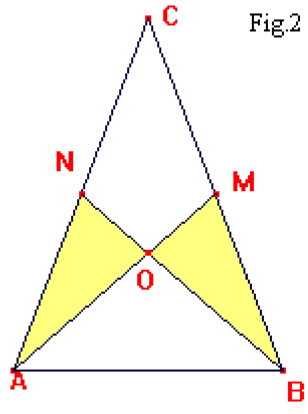
Prima tesi: I triangoli ABM, ABN sono isometrici

I due triangoli hanno in comune il lato AB, base del triangolo isoscele; inoltre gli angoli alla base AB di questo sono congruenti; infine, sapendo che sono congruenti i due lati BC, AC e che M, N sono i rispettivi punti medi, si deduce che sono congruenti i segmenti BM, AN. Pertanto i due triangoli in esame hanno ordinatamente congruenti due lati e gli angoli compresi, quindi sono congruenti per il **primo criterio**.

Seconda tesi: Il triangolo AOB è isoscele.

Dalla congruenza dei triangoli ABM, ABN, si deduce in particolare che sono congruenti, perché elementi corrispondenti, gli angoli ABN, BAM; d'altra parte essi sono angoli adiacenti al lato AB del triangolo AOB e quindi questo è isoscele sulla base AB.

Fig.2



Terza tesi: Gli angoli BOM, AON sono congruenti

Avendo provato che sussistono le congruenze:

$A\hat{B}M \cong B\hat{A}N$

$A\hat{B}O \cong B\hat{A}O$

per differenza di angoli congruenti si deduce

$M\hat{B}O \cong A\hat{B}M - A\hat{B}O \cong B\hat{A}N - B\hat{A}O \cong N\hat{A}O$;

inoltre sappiamo già che AN≅BM e che AO≅BO. I due triangoli BOM, AON sono congruenti ancora per il **primo criterio** avendo ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso.

Torna all'inizio

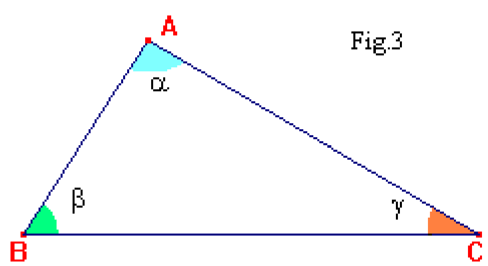
Problema_3

Prima tesi: Trovare le ampiezze degli angoli del triangolo ABC.

In Fig.3 è rappresentato un triangolo di riferimento.

Indicando più brevemente con α, β, γ rispettivamente le misure degli angoli BAC, ABC, ACB, dal testo del problema si ricavano le seguenti uguaglianze:

Fig.3



$$\beta = \frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma = \frac{3}{4}\beta = \frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{8}\alpha.$$

Ricordando che in un triangolo qualsiasi la somma degli angoli interni misura 180° possiamo impostare l'equazione:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \Leftrightarrow \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\alpha = 180°$$

che risolta fornisce il valore di α. La soluzione è $\alpha=96°$ e conseguentemente le ampiezze degli altri due angoli sono

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 48°, \qquad \gamma = \frac{3}{8}\alpha = \frac{3}{8}\cdot 96° = 36°$$

Seconda tesi: Valore di cui deve aumentare l'ampiezza dell'angolo maggiore affinché uguagli il doppio della somma degli altri due

Nel nuovo triangolo indichiamo ancora con α l'angolo maggiore; se questo deve avere ampiezza pari al doppio della somma delle ampiezze degli altri due, quindi

$$\alpha=2(\beta+\gamma),$$

tenendo conto della relazione fondamentale

$$\alpha+\beta+\gamma= 180°$$

si deduce che deve essere

$$2(\beta+\gamma)+\beta+\gamma=180° \Leftrightarrow 3(\beta+\gamma)=180° \Rightarrow \beta+\gamma=60° \Rightarrow$$
$$\alpha=180-(\beta+\gamma)=120°$$

L'ampiezza dell'angolo α del triangolo di partenza deve aumentare di 120°-96°=24°.

Torna all'inizio

Valutazione del Compito			
Algebra	Es_1	Determinazione dei valori ammissibili per il parametro n, composizione della tabella e calcolo del MCD e del m.c.m.	Punti 15
		Determinazione dei valori di verità delle proposizioni con le relative giustificazioni.	Punti 5
	Es_2	2.1- sviluppo completo e corretto dell'esercizio	Punti 5
		2.2- sviluppo completo e corretto dell'esercizio	Punti 10
		2.3- sviluppo completo e corretto dell'esercizio	Punti 10
		2.4- sviluppo completo e corretto dell'esercizio	Punti 10
		Totale punteggio riservato all'algebra	**Punti 55**
Geometria	Problema_1	Costruzione corretta della figura Dimostrazione richiesta	Punti 5 Punti 10
	Problema_2	Costruzione corretta della figura Dimostrazione della prima tesi Dimostrazione della seconda tesi Dimostrazione della terza tesi	Punti 5 Punti 10 Punti 6 Punti 10
	Problema 3	Impostazione e risoluzione del primo quesito Risoluzione del secondo quesito	Punti 12 Punti 6
		Totale punteggio riservato alla geometria	**Punti 64**
		Totale punteggio per i contenuti	**Punti 119**
		Punteggio riservato all'ordine dell'elaborato	**Punti 11,9**
		Punteggio massimo realizzabile	**Punti 130,9**

Torna all'inizio