Liceo Scientifico G. Stampacchia

Tricase

Oggetto: Compito in classe 1D

Argomenti: Logica- Analisi di proposizioni - Operazioni nei sistemi di numerazione in base 2-3-4-8. Relazioni interne ad insiemi- Relazioni d'ordine e d'equivalenza- Funzioni- Applicazione.

Termini principali: Proposizione- Contronominale – Tautologia –Tabella di verità - Sistema di numerazione - Relazione- Relazione d'ordine – Relazione d'equivalenza – Insieme quoziente – Partizione - Classi d'equivalenza - Funzione – Cardinalità - Funzione iniettiva – Percorso- Prodotto Cartesiano

Collegamenti alla soluzione
Es_1 Propos.A, Propos.B, Propos.C, Propos.D, Propos.E, Contronominale
Es_2 Tabella_di Verità
Es_3 Oper.ni nei Sistemi Numeraz. -
Es_4 Proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antiriflessiva, antisimmetrica – Relazione d'ordine – Tipi di…-
Es_5 Relazione d'ordine (largo, parziale) – Relazione d'equivalenza
Es_6 cardinalità funzioni
Es_7 Approfondimento extra compito Percorsi_Relaz._Prod_Cartesiano

Es_1) Nella classe 1X alla conclusione del primo periodo d'attività didattica ad alcuni alunni è stato attribuito il debito formativo nella disciplina Y. Si supponga vera la seguente proposizione:

P: " Gli alunni che hanno avuto il debito formativo nella disciplina Y nel periodo di riferimento hanno riportato almeno due valutazioni nella disciplina."

1.1 Analizzare ciascuna delle seguenti proposizioni e stabilire il loro valore di verità.

A): " Tutti gli alunni che non hanno avuto il debito formativo hanno ricevuto nel periodo di riferimento più di una valutazione nella disciplina Y."

B): " Gli alunni che hanno avuto meno di due valutazioni nella disciplina Y non hanno avuto assegnato il debito formativo."

C): " Se un alunno ha avuto tre valutazioni nella disciplina Y allora non ha avuto il debito formativo."

D): " Tutti gli alunni che non hanno avuto il debito formativo hanno ricevuto al massimo una valutazione."

E): " Tra gli alunni che hanno ricevuto il debito formativo nessuno ha ricevuto meno di due valutazioni".

1.2 Precisare se tra le proposizioni assegnate A, B, C, D, E è presente la contronominale della proposizione P ed indicarla in caso affermativo.

Es_2) Considerata la seguente proposizione

" **Se c'è il sole allora raccolgo le arance e mi diverto. Non raccolgo le arance, allora non c'è il sole**."

2.1 Individuare le proposizioni atomiche contenute e formalizzare la proposizione con i simboli della logica.

2.2 Compilare la tabella di verità della proposizione assegnata e precisare se trattasi di una tautologia.

Es_3) Operazioni nei sistemi di numerazione in base diversa da dieci.

Calcolare il valore dell'espressione numerica di seguito indicata.

$$\left((311)_4-(1011)_2\right)\cdot(101)_2+(14)_8=(\ldots\ldots)_3$$

dopo aver trasformato tutti i numeri che figurano al primo membro nel sistema binario. Il risultato dell'espressione deve essere espresso nel sistema a base tre.

Es_4)

4.1 Elencare le proprietà che caratterizzano una relazione d'equivalenza e precisare cosa s'intende per insieme quoziente.
4.2 Indicare di quali proprietà deve godere una relazione binaria interna ad un insieme A perché possa essere relazione d'ordine. Precisare i diversi tipi di relazione d'ordine.

Es_5) Sia dato l'insieme A={2; 4; 5; 8; 10}

5.1 Studiare la relazione binaria interna $\Re_1$ così definita

$\forall(\boldsymbol{x} ; \mathbf{y}) \in A\times A,\ \boldsymbol{x}\, \Re_1\, \mathbf{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}$ divide $\mathbf{y}$

precisando di quali proprietà gode. Fornire della relazione la rappresentazione matriciale.

5.2 Studiare la relazione binaria interna

$\forall(\boldsymbol{x} ; \mathbf{y}) \in A\times A,\ x\, \Re_2\, y \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\text{-}y=3\mathbf{k}$, con $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$

Nel caso la relazione sia d'equivalenza determinare il relativo insieme quoziente.

Es_6) Siano dati i due insiemi

A={$\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}$ è una consonante della parola "**pulito**" }

B={$\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}$ è una vocale non seguita da vocale nella parola "**eccezionale**" }

Rappresentare tutte le funzioni **f:A→B** che siano iniettive.

Rappresentare le funzioni f:A→B, non iniettive, per le quali risulta f(p)=e.

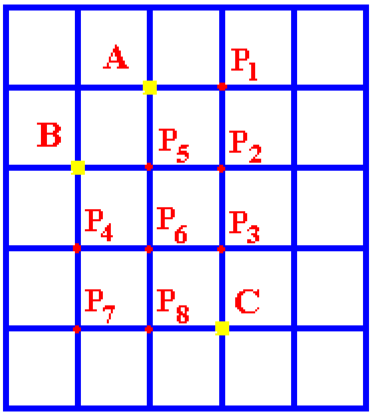
Es_7) Antonio (A) e Biagio (B) si devono recare da Carlo (C) e si possono muovere lungo la griglia indicata in figura nella quale sono indicate le posizioni iniziali. Si sa che Antonio e Biagio partono contemporaneamente e si muovono con la stessa velocità.

Premesso che per segmento della griglia s'intende un tratto di questa avente per estremi due nodi consecutivi, le regole per il moto sono:

- i due amici non devono percorrere mai alcun tratto insieme, né si devono incontrare;
- per raggiungere la posizione di Carlo devono percorrere esattamente quattro segmenti della griglia.

Indicare le possibili modalità per i percorsi che i due amici possono seguire. Esprimere i percorsi tramite la sequenza delle lettere dei nodi attraversati.

Fig.1



Torna su

Soluzione

Es_1) Riportiamo per comodità la proposizione **P**, che è ritenuta vera.

P: " Gli alunni che hanno avuto il debito formativo nella disciplina Y nel periodo di riferimento hanno riportato almeno due valutazioni nella disciplina."

1.1 **A)**: *" Tutti gli alunni che non hanno avuto il debito formativo hanno ricevuto nel periodo di riferimento più di una valutazione nella disciplina Y."*

La proposizione A è falsa. Infatti, nella proposizione P si precisa che gli alunni che hanno riportato il debito formativo nella disciplina Y hanno ricevuto almeno due valutazioni, ma non si dà alcun'informazione circa il numero di valutazioni riportate dagli alunni che non hanno riportato il debito. Se vogliamo estendere le nostre considerazioni possiamo solo affermare che questi alunni hanno ricevuto almeno una valutazione, diversamente non avrebbero superato indenni l'appuntamento di fine periodo.

B): *" Gli alunni che hanno avuto meno di due valutazioni nella disciplina Y non hanno avuto assegnato il debito formativo."*

La proposizione B è vera. Infatti, se un alunno ha ricevuto il debito formativo ha avuto almeno due valutazioni, quindi se un alunno ha avuto una sola valutazione (o al limite nessuna valutazione) non può aver avuto il debito formativo.

C): *" Se un alunno ha avuto tre valutazioni nella disciplina Y allora non ha avuto il debito formativo."*

La proposizione C è falsa. Infatti, un alunno può aver avuto tre valutazioni ed aver riportato il debito formativo nella disciplina Y.

D): *" Tutti gli alunni che non hanno avuto il debito formativo hanno ricevuto al massimo una valutazione."*

La proposizione D è falsa. Infatti, nella proposizione P non si fa alcun riferimento al numero delle valutazioni riportate dagli alunni che non hanno riportato il debito formativo nella disciplina Y.

E): *" Tra gli alunni che hanno ricevuto il debito formativo nessuno ha ricevuto meno di due valutazioni."*

La proposizione E è vera. Infatti, il suo contenuto logico è equivalente a quello della proposizione P. Questa proposizione precisa che nell'insieme degli alunni che hanno riportato il debito formativo nessuno ha ricevuto meno di due valutazioni; cioè tutti gli alunni con debito formativo hanno ricevuto un numero di valutazioni maggiore o uguale a due.

1.2 La proposizione contronominale della proposizione P è la proposizione B.

Torna su

Es_2) " **Se c'è il sole allora raccolgo le arance e mi diverto. Non raccolgo le arance, allora non c'è il sole**."

Nella proposizione s'individuano le seguenti proposizioni atomiche

p: " C'è il sole"
q: " (io) raccolgo le arance"
r: " (io) mi diverto"

La proposizione assegnata si formalizza come segue

$$(((p\Rightarrow(q\wedge r)) \wedge \text{not}(q)) \Rightarrow \text{not}(p)$$

Compilando la tabella di verità si riscontra che si tratta di una **tautologia**, cioè la proposizione assume sempre valore vero. Per quanto riguarda il contenuto logico si evince che la non raccolta delle arance **not(q)**, implica che la proposizione **(q∧r)** è falsa e dunque non è possibile che sia vera la proposizione **p**; infatti, se fosse vera **p**, allora affinché sia vera la proposizione $(p\Rightarrow(q\wedge r))$, dovrebbe essere vera $(q\wedge r)$, cosa impossibile se q è falsa (come lo è visto che le arance non sono raccolte).

Di seguito riportiamo la **tabella dei valori di verità** della proposizione.

Tabella di verità							
p	**q**	**r**	**$Q\wedge r$**	**$p\Rightarrow(q\wedge r)$**	**not(q)**	**$(p\Rightarrow(q\wedge r))\wedge not(q)$**	**$((p\Rightarrow(q\wedge r))\wedge not(q))\Rightarrow not(p)$**
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Osservazione sull'espressione letterale della proposizione

Spesso il linguaggio letterale non consente d'essere precisi. La proposizione proposta da alcuni è stata interpretata in un modo diverso. Precisamente, la proposizione

r: " (io) mi diverto"

è stata vista in congiunzione alla proposizione

"Se c'è il sole allora (io) raccolgo le arance"

e conseguentemente è stata analizzata la seguente proposizione composta

$$\big(((p\Rightarrow q)\wedge r)\wedge not(q)\big)\Rightarrow not(p).$$

p	**q**	**r**	**$p\Rightarrow q$**	**$(p\Rightarrow q)\wedge r$**	**not(q)**	**$((p\Rightarrow q)\wedge r)\wedge not(q)$**	**$((p\Rightarrow(q\wedge r))\wedge not(q))\Rightarrow not(p)$**
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V

Anche questa proposizione è una tautologia.

Torna su

Es_3) Operazioni nei **sistemi di numerazione** in base diversa da dieci.

Per calcolare il valore dell'espressione numerica assegnata

$$\big((311)_4-(1011)_2\big)\cdot(101)_2+(14)_8=(\ldots\ldots)_3$$

osserviamo che

- $(311)_4= 1\cdot4^0+1\cdot4^1+3\cdot4^2=1+4+48=53$
  e nel sistema binario si ha $53=(110101)_2$;
- $(14)_8 = 4\cdot8^0+1\cdot8^1= 12$
  e nel sistema binario si ha $12=(1100)_2$.

Ciò premesso, le elaborazioni eseguite nel sistema binario forniscono i seguenti risultati

$$\big((311)_4-(1011)_2\big)\cdot(101)_2+(14)_8=\big((110101)_2 -(1011)_2\big)\cdot(101)_2+(1100)_2=$$

$$(101010)_2\cdot(101)_2+(1100)_2= (11010010)_2+(1100)_2=(11011110)_2=(222)_{10}=(22020)_3$$

Verifica con la trasformazione degli operandi nel sistema decimale

$(311)_4 = 1\cdot4^0+1\cdot4^1+3\cdot4^2=1+4+48=53$

$(1011)_2=1\cdot2^0+1\cdot2^1+0\cdot2^2+1\cdot2^3= 1+2+0+8=11$

$(101)_2=1\cdot2^0+0\cdot2^1+1\cdot2^2=1+0+4=5$

$(14)_8 = 4\cdot8^0+1\cdot8^1= 12$

$(53-11)\cdot5+12= 42\cdot5+12=222$ C.V.D.

Torna su

Es_4)

4.1 Una relazione binaria interna ad un insieme è detta relazione d'equivalenza se gode delle tre proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva che esprimiamo con i simboli della logica

Proprietà riflessiva $\forall x \in A \Rightarrow x\Re x$

Proprietà simmetrica $\forall\, x, y \in A,\ (x \,\Re\, y \Rightarrow y \,\Re\, x)$

Proprietà transitiva $\forall\, x, y, z \in A,\ (x \,\Re\, y \wedge y \,\Re\, z) \Rightarrow x \,\Re\, z$

Insieme quoziente

Ogni relazione $\Re$ d'equivalenza in un insieme A induce nell'insieme una corrispondente partizione i cui elementi sono le classi d'equivalenza che si determinano. L'insieme quoziente è questa particolare partizione.

4.2 Una relazione $\Re$ interna ad un insieme si dice una **relazione d'ordine** se gode delle due **proprietà antisimmetrica e transitiva**.

Formalizzazione della **proprietà antisimmetrica**:

$\forall\, x, y \in A,\ (x \,\Re\, y \wedge x \neq y) \Rightarrow (y\ \text{not}(\Re)\ x)$

Tipi di relazione d'ordine

Una **relazione d'ordine si dice totale** nell'insieme A se comunque presi due elementi x, y $\in$ A si verifica uno dei due casi $x \,\Re\, y$, $y \,\Re\, x$.

Una **relazione d'ordine si dice parziale** nell'insieme A se esistono almeno due elementi x, y $\in$ A per i quali non si verifica nessuna delle due eventualità: $x \,\Re\, y$, $y \,\Re\, x$. Questo concetto si esprime anche con la locuzione:<< esistono in A almeno due elementi che non sono confrontabili>>.

Per indicare i diversi tipi di relazione d'ordine è opportuno definire un'altra proprietà di cui può godere una relazione binaria interna ad un insieme.

Proprietà antiriflessiva

Una relazione $\Re$ interna ad un insieme si dice che gode della **proprietà antiriflessiva** quando nessun elemento dell'insieme è in relazione con se stesso:

$\forall x \in A \Rightarrow x \not\Re x$

Una relazione d'ordine, fermo restando che deve godere delle due proprietà antisimmetrica e transitiva, può godere della proprietà riflessiva o della proprietà antiriflessiva.

Se gode anche della proprietà riflessiva si dice essere una relazione d'ordine in senso lato; se gode della proprietà antiriflessiva si dice essere una relazione d'ordine in senso stretto.

Torna su

Es_5)

5.1 Considerato che l'insieme A è composto solo da numeri interi diversi da zero, si deduce immediatamente che la relazione $\Re_1$ in esame gode delle proprietà:

riflessiva infatti ogni numero è divisore di se stesso;

transitiva se x è divisore di **y** ed **y** è divisore di **z** allora anche x è divisore di **z**;

antisimmetrica se $\boldsymbol{x}$ è divisore di **y,** ed $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{y}$ allora evidentemente y non può essere divisore di $\boldsymbol{x}$.

La relazione è d'ordine largo.

Si noti, comunque che **la relazione d'ordine nell'insieme è parziale**. Infatti esistono coppie di elementi ($\boldsymbol{x}$;**y**) per i quali non si verifica che $\boldsymbol{x}$ sia divisore di **y** , né che **y** sia divisore di $\boldsymbol{x}$. Ad esempio **(2;5), (4;5), (5;8),…**

5.2 La relazione $\mathfrak{R}_2$ è d'equivalenza. Infatti,

- vale la proprietà riflessiva perché ogni elemento **x** è in relazione con se stesso $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}=0=3\cdot 0$;
- vale la proprietà simmetrica, perché se $\boldsymbol{x}$-**y**=3**k**, con **k**∈**Z** ⇒**y**-$\boldsymbol{x}$=3(-**k**), ed evidentemente -**k**∈**Z;**
- vale la proprietà transitiva perché, se

$$x\mathfrak{R}_2 y \Leftrightarrow x-y=3k, con..k \in Z$$

$$y\mathfrak{R}_2 z \Leftrightarrow y-z=3h, con..h \in Z$$

allora sommando membro a membro si ottiene

$$(x-y)+(y-z)=3k+3h$$

e semplificando si ricava

$$x-z=3(k+h);$$

poiché $k+h$ è ancora un numero intero si conclude che x è in relazione con z.

Classi d'equivalenza ed insieme quoziente

Si riconosce immediatamente che si hanno solo due classi di equivalenza. Infatti sono in relazione gli elementi 2, 5, 8 , e sono in relazione 4 e 10. Pertanto le uniche due classi d'equivalenza sono

[2]={2; 5; 8} e [4]={4;10}

L'insieme quoziente corrispondente è $A/\mathfrak{R}_2=\{[2];[4]\}$

Torna su

Es_6)

I due insiemi sono così composti:

A={p; *l*; t}, B ={e; o; a}

I due insiemi hanno cardinalità tre (perché sono composti da tre elementi) e le funzioni iniettive sono anche biunivoche; il loro numero è sei. Questa conclusione si giustifica così:
il **primo elemento** di A può essere associato con uno qualsiasi di B, quindi **in tre modi**;
il **secondo elemento** di A può essere associato **solo ad uno dei due rimasti liberi** (dopo la scelta operata per il primo elemento); per il terzo elemento si è vincolati ad abbinarlo all'unico elemento rimasto libero in B. Pertanto le possibilità sono 3·2·1=6
Riportiamo di seguito le sei funzioni

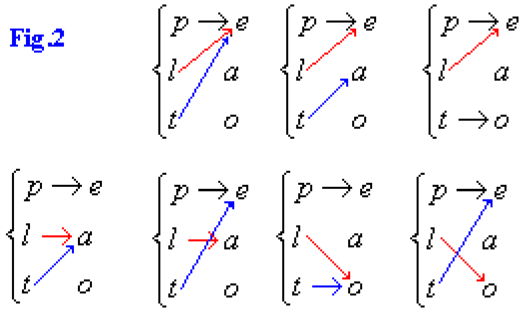
$$f_1:\begin{cases} p\to e\\ l\to a\\ t\to o\end{cases};\quad f_2:\begin{cases} p\to e\\ l\to o\\ t\to a\end{cases};\quad f_3:\begin{cases} p\to a\\ l\to o\\ t\to e\end{cases};\quad f_4:\begin{cases} p\to a\\ l\to e\\ t\to o\end{cases};\quad f_5:\begin{cases} p\to o\\ l\to e\\ t\to a\end{cases};\quad f_6:\begin{cases} p\to o\\ l\to a\\ t\to e\end{cases}$$

Funzioni non iniettive per le quali f(p)=e

Si verifica che esistono solo **sette funzioni**, una delle quali è la funzione costante. Le funzioni sono rappresentate in Fig.2

Torna su

Fig.2



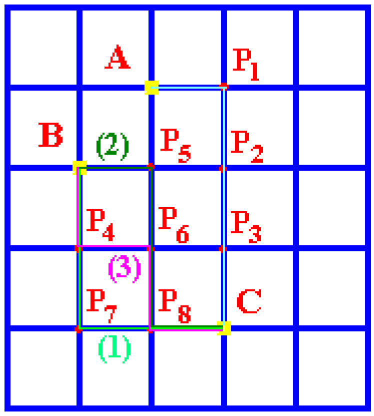
Funzioni non iniettive con f(p)=e

Es_7)

In riferimento alla Fig.1.1, dovendo rispettare le regole per i percorsi, quelli che possono seguire Antonio e Biagio sono i seguenti:

- se Antonio segue il percorso $AP_1P_2P_3C$ (indicato con il tratto in azzurro) allora Biagio può seguire il percorso $BP_4P_7P_8C$ (colore verde chiaro) o il percorso $BP_5P_6P_8C$ (colore verde scuro) oppure il percorso $BP_4P_6P_8C$ (colore fucsia);
- se Antonio segue il percorso $AP_5P_2P_3C$ allora Biagio può seguire il percorso $BP_4P_6P_8C$ oppure il percorso $BP_4P_7P_8C$;
- se Antonio segue il percorso $AP_5P_6P_3C$ allora Biagio può seguire solo il percorso $BP_4P_7P_8C$.

Fig.1.1



Facciamo notare espressamente che Antonio non può seguire il percorso $AP_5P_6P_8C$ perché se lo scegliesse Biagio lo incontrerebbe certamente in uno dei nodi P_5, P_6, P_8.

Concludiamo che le soluzioni al quesito sono sei.

Torna su

(Approfondimento non richiesto nel compito)

La relazione tra i percorsi compatibili come sottoinsieme del prodotto cartesiano

Siamo interessati ad individuare i due insiemi P_A e P_B dei percorsi che consentono a ciascuno dei due amici di recarsi da Carlo, con la sola condizione che ciascuno deve percorrere quattro segmenti della griglia. Osservando la figura si ricava che i due insiemi sono composti dai seguenti elementi:

$P_A=\{ AP_1P_2P_3C;\ AP_5P_2P_3C;\ AP_5P_6P_3C;\ AP_5P_6P_8C\}=$

$P_B=\{ BP_4P_7P_8C;\ BP_4P_6P_8C;\ BP_4P_6P_3C;\ BP_5P_6P_8C;\ BP_5P_6P_3C;\ BP_5P_2P_3C;\ \}$

Antonio può raggiungere Carlo con quattro percorsi diversi, mentre Biagio ha sei percorsi a disposizione.

Indichiamo gli insiemi dei percorsi semplicemente con

$P_A=\left\{P_1^A;P_2^A;P_3^A;P_4^A\right\}$, $P_B=\left\{P_1^B;P_2^B;P_3^B;P_4^B;P_5^B;P_6^B\right\}$

Le condizioni imposte dal problema per i percorsi che i due amici possono seguire contemporaneamente induce una relazione tra l'insieme P_A e l'insieme P_B. Nella tabella a lato sono evidenziate con un asterisco (*) le coppie dei percorsi ammissibili; ce ne sono sei, appunto quelle che rappresentano la soluzione del problema proposto.

Ricordiamo che la relazione $\Re$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano P_Ax P_B.

$\Re$	P_1^A	P_2^A	P_3^A	P_4^A
P_1^B	*	*	*	
P_2^B	*			
P_3^B				
P_4^B	*	*		
P_5^B				
P_6^B				

Torna su