Tempo complessivo a disposizione 120 minuti

Liceo Scientifico G. Stampacchia
Tricase

Oggetto: compito in classe 1D
Argomenti: Calcolo letterale: fattorizzazione, semplificazione di frazioni algebriche, divisione tra polinomi- Geometria piana: Confronto tra gli elementi di un triangolo – Informatica (Utilizzo delle strutture cicliche **Repeat…Until…,For…To...Do…**; utilizzo della struttura di selezione **If…Then…Else…**)

Collegamenti alla Soluzione	
Algebra	Scomposizione in fattori: Es_1
	Espress. Con Frazioni Algebriche Espr_1, Espr_2
	Es_3:Divisioni tra polinomi Div_1, Div_2
Geometria	Problema_1
	Problema_2
	Problema_3 Tesi_1, Tesi_2, Tesi_3
Informatica	

Algebra

Es_1) Scomporre in fattori i seguenti polinomi

1.1 a^3-a^2-a+1 1.2 $a^2b^2-2a^3b+2ab^3-b^4$

1.3 x^6-9x^3+8

1.4 $xy-y^2+2y-x-1$

1.5 $x^{2n}-y^{4n}+x^{3n}-3x^{2n}y^{2n}+3x^ny^{4n}-y^{6n}$

1.6 $6x^2+5x-6$

Es_2) Semplificare le seguenti espressioni algebriche:

2.1 $$\left(\frac{x^2-1}{x^2-x+1}-\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^3+1}\right):\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-x+1}$$

2.2 $$\left(\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x^2-xy}\right)\cdot\frac{x^4-y^4}{4x^2y+4xy^2+y^3}$$

Es_3) Eseguire le seguenti divisioni tra polinomi

3.1 $\left(x^3-\frac{7}{2}x^2+4x-1\right):(2x-3)$ 3.2 $\left(x^4-2x^2+3x-2\right):\left(-x^2+x-1\right)$

Geometria

Problema_1- Considerato un triangolo qualsiasi dimostrare che l'altezza relativa ad un lato è minore della semisomma degli altri due lati.

Problema_2- Dimostrare che in un triangolo acutangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro del triangolo.

Problema_3

3-1 Dimostrare che in un triangolo qualsiasi il segmento che congiunge un vertice con un punto interno del lato opposto è minore di almeno uno degli altri due lati.

3-2 Considerato il triangolo acutangolo ABC precisare come deve essere scelto un punto P internamente al lato AB in modo che per il segmento CP si abbia CP<AC e CP<BC.

3-3 Disegnare un triangolo ABC in modo che comunque si scelga un punto P interno al lato AB il segmento CP sia minore di uno solo dei due lati AC, BC.

Informatica

Tempo a disposizione 40 minuti

Realizzare un programma in T.P. che realizzi i seguenti obiettivi:

1 permetta all'utente di inserire un numero naturale A non superiore a 3000;
2 stampi su una stessa riga i primi dieci numeri naturali consecutivi ad A;
3 calcoli la somma S dei primi dieci numeri suddetti fornendo in output il risultato;
4 confronti la somma S con il quadrato del numero A e fornisca in output il risultato del confronto(es. << il numero S è maggiore del numero…>>).

Soluzione

Algebra

Es_1)

1.1 $a^3-a^2-a+1=a^2(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^2-1)=(a-1)^2(a+1)$

1.2 $a^2b^2-2a^3b+2ab^3-b^4=b\left(a^2b-2a^3+2ab^2-b^3\right)=$

$b\left[b(a^2-b^2)-2a(a^2-b^2)\right]=b(a^2-b^2)(b-2a)=b(a+b)(a-b)(b-2a)$

1.3 x^6-9x^3+8 Se poniamo per semplicità $x^3=t\Rightarrow x^6=\left(x^3\right)^2=t^2$, si ottiene il trinomio t^2-9t+8. Si tratta di un particolare trinomio di secondo grado che possiamo scomporre agevolmente in fattori se riusciamo a determinare due numeri **m**, **n** la cui somma sia uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il cui prodotto sia uguale al termine noto:

m+n = **-9**; **mn** = **8**

I due numeri richiesti sono **m = -8**, **n =-1** ed il trinomio si scompone nella forma:

$t^2-9t+8=(t-8)(t-1)$

Tornando alla variabile x si ha

$x^6-9x^3+8=(x^3-8)(x^3-1)$

e si nota la presenza di due differenze di cubi che sono ulteriormente scomponibili. Si ha:

$(x^3-8)(x^3-1)=(x^3-2^3)(x^3-1^3)=(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)(x^2+x+1)$

1.4 $xy-y^2+2y-x-1=(xy-x)-(y^2-2y+1)=x(y-1)-(y-1)^2=(y-1)(x-y+1)$

1.5 $x^{2n}-y^{4n}+x^{3n}-3x^{2n}y^{2n}+3x^ny^{4n}-y^{6n}=\left[\left(x^n\right)^2-\left(y^{2n}\right)^2\right]+\left(x^n-y^{2n}\right)^3=$

$(x^n+y^{2n})(x^n-y^{2n})+\left(x^n-y^{2n}\right)^3=(x^n-y^{2n})\cdot\left[(x^n+y^{2n})+\left(x^n-y^{2n}\right)^2\right]$

1.6 $6x^2+5x-6$ Per scomporre questo trinomio si devono cercare due numeri interi la cui somma sia 5 ed il cui prodotto sia 6·(-6) = -36. I due numeri richiesti sono +9, -4. Il polinomio si può così sviluppare:

$6x^2+5x-6=6x^2+9x-4x-6=3x(2x+3)-2(2x+3)=(2x+3)(3x-2)$

Es_2) 2.1 $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x^3+1}\right):\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-x+1}=$

$$\left[\frac{x^2-1}{x^2-x+1}-\frac{x}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right]:\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2-x+1}=\frac{(x^2-1)(x+1)-x(x^2-x+1)+1}{(x+1)(x^2-x+1)}:\frac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-x+1}=$$

$$\frac{2x^2-2x}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2x(x-1)}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2x}{(x+1)^2(x-1)}$$

2.2 $$\left(\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x^2-xy}\right)\cdot\frac{x^4-y^4}{4x^2y+4xy^2+y^3}=\left[\frac{x}{(x-y)(x+y)}-\frac{x+y}{x(x-y)}\right]\cdot\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{y(2x+y)^2}=$$

$$\frac{x^2-(x+y)^2}{x(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}{y(2x+y)^2}=\frac{-y(2x+y)}{x}\cdot\frac{(x^2+y^2)}{y(2x+y)^2}=-\frac{x^2+y^2}{x(2x+y)}$$

L'equivalenza dell'espressione finale con quella iniziale è assicurata sotto le condizioni (x+y≠0), (x-y≠0), y≠0.

Es_3 Divisioni tra polinomi

3.1 $\left(x^3-\frac{7}{2}x^2+4x-1\right):(2x-3)$

In Fig.3.1 sono riportati tutti i passaggi nell'esecuzione della divisione.

Il quoziente è $Q(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$;

il resto è $R=\frac{1}{2}$.

La divisione non è esatta perché il resto è diverso da zero.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-\frac{7}{2}x^2+4x-1 & 2x-3 \\ \hline
-x^3+\frac{3}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
//\quad -2x^2+4x & \\
\quad 2x^2-3x & \\ \cline{1-1}
\quad //\quad x-1 & \\
\qquad -x+\frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad //\quad \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Fig.3.1

3.2 $\left(x^4-2x^2+3x-2\right):\left(-x^2+x-1\right)$

La divisione è riportata in Fig.3.2- Si tratta di una divisione esatta perché il resto è zero; il polinomio dividendo x^4-2x^2+3x-2 è multiplo del polinomio divisore $-x^2+x-1$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+0x^3-2x^2+3x-2 & -x^2+x-1 \\ \hline
-x^4+\ x^3-\ x^2 & -x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
\quad x^3-3x^2+3x & \\
\quad -x^3+\ x^2-\ x & \\ \cline{1-1}
\qquad -2x^2+2x-2 & \\
\qquad 2x^2-2x+2 & \\ \cline{1-1}
\qquad //\quad //\quad // &
\end{array}
$$

Fig.3.2

Geometria

Problema_1

Facciamo riferimento alla figura Fig.1.
Consideriamo il triangolo ABC e sia CH l'altezza relativa al lato AB. Vogliamo dimostrare che sussiste la disuguaglianza:

$$CH < \frac{AC+BC}{2} \qquad (1.1)$$

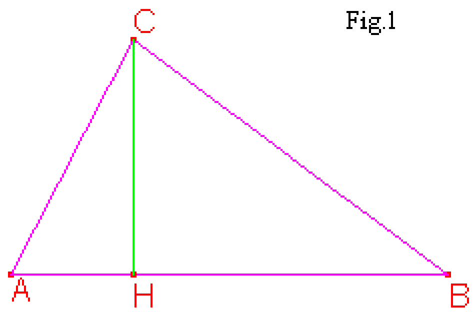


Fig.1

Ricordiamo che **in un triangolo all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore** (e viceversa) e quindi in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il maggiore dei tre lati perché si oppone all'angolo retto che è maggiore di ciascuno degli altri due.
Ciò premesso, osserviamo che i due triangoli ACH, CHB sono rettangoli in H e quindi sussistono le disuguaglianze

CH<AC e CH<BC (1.2)

che sommate membro a membro forniscono la disuguaglianza 2CH<AC+BC dalla quale segue la tesi.

Osservazione

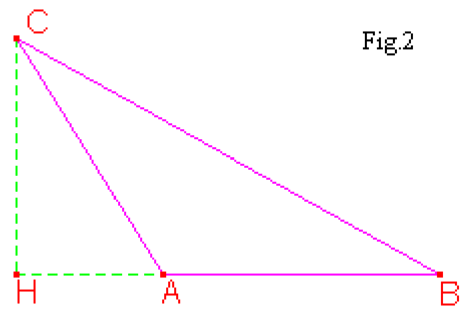


Fig.2

In Fig.2 è rappresentato il triangolo ABC per il quale l'altezza CH relativa al lato AB cade esternamente al triangolo.
Ebbene, la disuguaglianza (1.1) sussiste perché sono ancora valide le disuguaglianze (1.2).

Problema_2

Facciamo riferimento alla figura Fig.3 nella quale è rappresentato il triangolo acutangolo ABC e le tre altezze AK, BP, CH. Occorre dimostrare che sussiste la seguente doppia disuguaglianza:

$$\frac{AB+BC+AC}{2} < AK+BP+CH < AB+BC+AC \qquad (2.1)$$

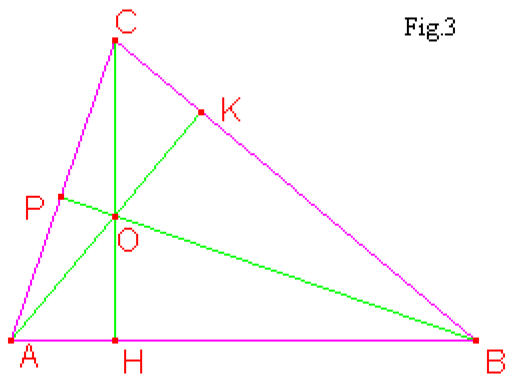


Fig.3

Dai triangoli rettangoli AKB, BPC, ACH otteniamo rispettivamente le disuguaglianze
AK<AB
BP<BC,
CH<AC (2.2)
che sommate membro a membro forniscono la disuguaglianza AK+BP+CH<AB+BC+AC, cioè la seconda parte della (2.1).
Per dimostrare la prima parte della (2.1) ricordiamo che **in un qualsiasi triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due**. Applicando questa proprietà ai due triangoli rettangoli ACH, CHB possiamo scrivere

CH>AC-AH, CH>BC-HB (2.3)

che sommate membro a membro forniscono la disuguaglianza

2CH>AC+BC-(AH+HB) ⇔ 2CH>AC+BC-AB. (2.4)

Ragionando in modo analogo con i triangoli rettangoli AKB, AKC si ricava la disuguaglianza

2AK>AB+AC-BC (2.5)

ed utilizzando infine i triangoli rettangoli ABP, BPC si ricava la disuguaglianza

2BP>AB+BC-AC (2.6)

Sommando membro a membro le tre disuguaglianze (2.4), (2,5), (2.6) si ricava

2AK+2CH+2BP>(AB+AC-BC)+(AC+BC-AB)+(AB+BC-AC) ⇔
2(AK+CH+BP)>AB+BC+AC

che è la tesi richiesta.

Autore Luigi Lecci

Problema_3

3.1 **Nota preliminare-** E' bene precisare che per la dimostrazione, una volta fissato il vertice del triangolo (il vertice C nelle figure riportate) in relazione al quale si considera un punto interno sul lato opposto, si sfrutta l'altezza del triangolo passante per quel vertice e nella discussione è fondamentale sapere dove cade il suo piede rispetto al lato (il lato AB nelle figure): il piede dell'altezza cade internamente al lato opposto se i due angoli del triangolo adiacenti al lato sono acuti, coincide con uno degli estremi se il triangolo è rettangolo e l'angolo retto è uno dei due adiacenti al lato, cade esternamente al lato se il triangolo è ottusangolo e l'angolo ottuso è uno dei due angoli adiacenti al lato. Nel triangolo acutangolo le altezze sono tutte interne; se il triangolo è rettangolo due coincidono con i cateti e l'altra è interna; se il triangolo è ottusangolo due altezze cadono esternamente e la terza è interna al triangolo. Poiché nel testo del problema si fa riferimento ad un triangolo qualsiasi, le considerazioni svolte suggeriscono che la tesi deve essere dimostrata per ciascuno dei tre casi che si possono verificare. Nella Fig.4 si considera un triangolo ABC acutangolo e si sviluppa la dimostrazione. Se il triangolo ABC è rettangolo in A, come in Fig.4b, scegliendo un punto qualsiasi P interno al lato AB è evidente che il segmento CP è minore dell'ipotenusa BC del triangolo. Per il caso in cui il triangolo è ottusangolo e l'altezza relativa al vertice considerato cade esternamente al triangolo si può far riferimento alla Fig.6 riportata di seguito; anche in questo caso è immediato verificare che il segmento CP considerato, con P interno ad AB, è minore di uno (solo) dei due lati AC, CB.

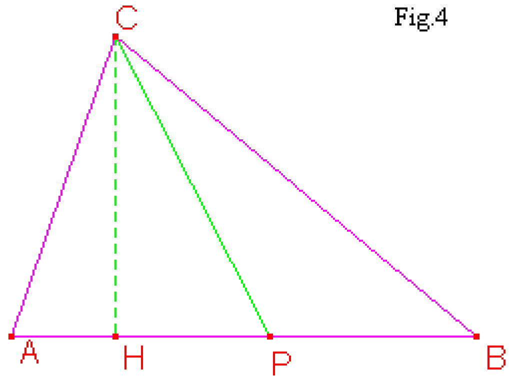


Fig.4

Facciamo riferimento alla Fig.4 dove è rappresentato un **triangolo acutangolo** per il quale è stato scelto un punto P sul lato AB. Si vuole provare che il segmento CP è minore di almeno uno tra i lati AC, BC del triangolo. Nel caso specifico facciamo vedere che CP<BC.

Per la dimostrazione tracciamo l'altezza CH relativa al lato AB ed osserviamo che il punto P che si sceglie può trovarsi in una delle tre seguenti posizioni:

a) è interno al segmento HB (come in figura);
b) coincide con il piede dell'altezza H;
c) è interno al segmento AH.

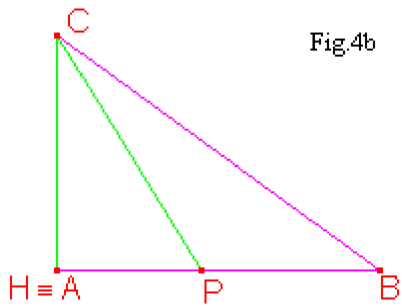


Fig.4b

Nel primo caso, considerando il triangolo rettangolo CHP, retto in H, poiché l'angolo CPH è acuto segue che l'angolo CPB, adiacente a CPH, è ottuso e pertanto è il maggiore dei tre angoli del triangolo BCP. Poiché in un triangolo **all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore** segue che BC è il maggiore dei tre lati e quindi si ha anche **CP<BC**.

Nel secondo caso (P≡H), si osserva che CP è cateto sia del triangolo rettangolo CPB, quindi è minore dell'ipotenusa BC, sia del triangolo rettangolo CPA e quindi è minore anche dell'ipotenusa AC.

Nel terzo caso (P compreso tra A ed H), risulta CP<AC per considerazioni analoghe a quelle svolte nel primo caso.

3.2 **Facciamo riferimento alla Fig.5**.

Tracciata l'altezza CK relativa al lato AB, i due segmenti AK, KB (proiezioni rispettivamente dei lati AC, CB) possono essere congruenti oppure uno maggiore dell'altro.

3.2.1 Se AK≅KB il triangolo ABC è isoscele su AB e comunque si sceglie il punto P internamente alla base AB il segmento CP sarà minore di AC≅BC.

3.2.2 Se AK<KB si costruisce il punto A' simmetrico di A rispetto a K. Si osserva che scegliendo il punto P internamente al

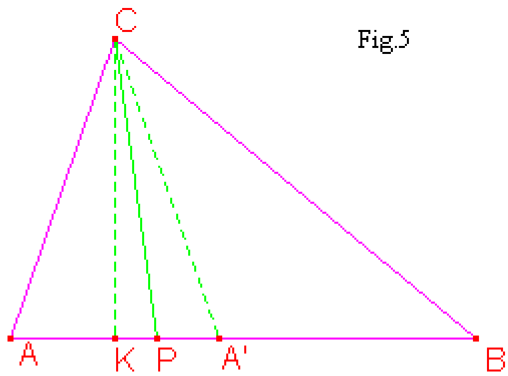
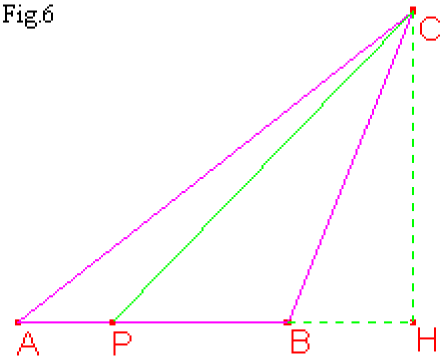


Fig.5

segmento AA' risulterà CP<CA'<BC, ed anche CP<AC.

3.3 E' sufficiente disegnare un triangolo ottusangolo ABC avente l'angolo ottuso in uno dei due vertici A o B. In Fig.6 ne è rappresentato uno ottusangolo in B. Si riconosce immediatamente che preso comunque un punto P interno al lato AB il segmento CP è maggiore del lato BC e minore del lato AC. La dimostrazione si ricava osservando che il triangolo PBC è ottusangolo in B e quindi CP è il lato maggiore; inoltre, essendo acuto l'angolo CPB si deduce che è ottuso l'angolo adiacente APC e dunque è ottusangolo anche il triangolo ACP ed il suo lato maggiore è AC $\Rightarrow$ AC>CP.

Fig.6



Informatica

Riportiamo di seguito la codifica di una soluzione del problema proposto.

```
Program C41D0304;
 Uses Crt;
 Var A,I,S:        Integer;
 Begin
  Clrscr;
  write(' Questo programma permette di inserire un numero naturale A non superiore');
  writeln(' a 3000 e saranno stampati i successivi dieci numeri interi e la loro somma.');
  Repeat
   Write(' A=');Readln(A);
   If (A<0) Or (A>3000) Then
                      Begin
                           Textcolor(2+blink);
                           Writeln(' Errore nel dato!');
                      End;
  Until (A>=0)and(A<=3000);
  S:=0;
  For I:=1 to 10 do
      Begin
        Write(A+I,' ');
        S:=S+A+I;
     End;
  writeln;
  If (S>Sqr(A)) Then
              Write(' La somma ',S,' dei primi dieci numeri interi supera',
                   ' il quadrato ',A*A,' del numero ',A)
  Else Write('La somma ',S,' dei primi dieci numeri interi non supera il quadrato ',A*A,' di ',A);
  Readln;
End.
```