Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"
Tricase

Tempo di lavoro
100 minuti

Oggetto: compito in Classe 2D/PNI

Argomenti: Sistema numerico di equazioni di primo grado da risolvere con artifici- Discussione di un sistema letterale di primo grado- Sistema di tre equazioni di primo grado in tre incognite (Regola di Sarrus)- Geometria: Problema di primo grado - Informatica: Programma in T.P. per la discussione di un sistema di due equazioni di primo grado.

Soluzione Es_1
Soluzione Es_2
Soluzione Es_3
Regola di Sarrus
Soluzione Problema
Prima Parte
Seconda Parte
Soluzione Informatica

Es_1) (m)Risolvere il seguente sistema numerico

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{5}{x+y}=2 \\ \dfrac{1}{2x-y}=\dfrac{5}{3(x+y)} \end{cases}$$

Es_2)(m) Risolvere e discutere il seguente sistema letterale

$$\begin{cases} \dfrac{b-y}{2x+a}=\dfrac{2b-a}{2a} \\ \dfrac{a-2x}{b}+\dfrac{y+b}{a}=1 \end{cases}$$

Es.3)(m) Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema di primo grado

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x-4y+z=-2 \\ -x-6y+3z=-10 \end{cases}$$

Problema (m)-

P1- Determinare le dimensioni di un rettangolo sapendo che il loro rapporto è 3/2 e che aumentando del 10% la misura del lato maggiore e diminuendo del 10% quella del lato minore la misura del perimetro aumenta di 2m.

P2- In relazione al rettangolo di cui al punto precedente, stabilire in quale posizione si deve tracciare una corda parallela al lato avente misura minore in modo da dividere il rettangolo in due rettangoli tali che il rapporto delle loro aree sia 3/2.

Informatica

Scrivere un programma in T.P. che permetta di discutere il sistema di equazioni primo grado

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$ quando siano dati in input i valori dei coefficienti a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2.

Soluzione

1) Il sistema proposto si risolve in modo elementare introducendo due incognite temporanee ponendo:

$\dfrac{1}{2x-y}=u$, $\dfrac{1}{x+y}=v$ e risolvendo il sistema che si ottiene

$$\begin{cases}3u+5v=2\\3u-5v=0\end{cases}; \qquad (1.1)$$

una volta risolto quest'ultimo sistema si imposta un nuovo sistema nelle incognite x, y.
Dal sistema (1.1) si ricava immediatamente (applicando il metodo di riduzione si può prima sommare membro a membro e poi sottrarre membro a membro):

$$6u=2 \Rightarrow u=\frac{1}{3}; \quad 10v=2 \Rightarrow v=\frac{1}{5}$$

Si deve ora risolvere il nuovo sistema

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2x-y}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-y=3\\x+y=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-(5-x)=3\\y=5-x\end{cases} \Rightarrow$$

La soluzione del sistema in esame è: $\begin{cases}x=\dfrac{8}{3}\\ y=5-\dfrac{8}{3}=\dfrac{7}{3}\end{cases}$ Torna su

2) Il sistema deve essere ricondotto alla forma normale, cioè si devono eliminare i denominatori, imponendo le necessarie condizioni di esistenza (C.E.), e ridurre i termini simili.
Le C.E. sono: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $2x+a\neq 0$. Ciò premesso, dopo alcune elaborazioni algebriche si ottiene la forma ridotta:

$$\begin{cases}2(2b-a)x+2ay=a^2\\2ax-by=a^2+b^2-ab\end{cases}$$

Risolviamo il sistema applicando il metodo di Cramer.; questo metodo consente anche una più agevole discussione.
Calcoliamo i valori dei tre determinanti:

$$D=\begin{vmatrix}2(2b-a) & 2a\\ 2a & -b\end{vmatrix}=-2(2a^2-ab+2b^2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}a^2 & 2a\\ a^2+b^2-ab & -b\end{vmatrix}=-a(2a^2-ab+2b^2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2(2b-a) & a^2\\ 2a & a^2+b^2-ab\end{vmatrix}=-2(a-b)(2a^2-ab+2b^2)$$

Osserviamo che con le condizioni $a\neq0$, $b\neq0$, al variare di a e b nel campo dei numeri reali risulta $D\neq0$(1) e quindi il sistema è determinato; la soluzione è:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-a(2a^2-ab+2b^2)}{-2(2a^2-ab+2b^2)}=\frac{a}{2};\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2(a-b)(2a^2-ab+2b^2)}{-2(2a^2-ab+2b^2)}=a-b$$

Per una completa discussione del sistema occorrerebbe far vedere che la soluzione trovata è accettabile, cioè che non contrasta con le condizioni di esistenza (C.E.).
Avendo già precisato che devono valere le condizioni $a\neq0$, $b\neq0$, si tratta di provare che al variare dei valori dei parametri a, b è rispettata anche l'ulteriore condizione $2x+a\neq0$, quindi che il valore ricavato per l'incognita x sia diverso da $-a/2$. Ebbene, poiché l'uguaglianza $a/2=-a/2$ sussiste solo per $a=0$, mentre è garantita la condizione $a\neq0$, si deduce che è soddisfatta anche la condizione $2x+a\neq0$ e quindi la soluzione trovata è accettabile per il sistema che è pertanto determinato. Torna su

3) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x-4y+z=-2 \\ -x-6y+3z=-10 \end{cases}$

Il sistema è già ridotto alla forma normale, dunque, considerato che si deve risolvere applicando il metodo di Cramer, si devono calcolare i quattro determinanti del terzo ordine corrispondenti.

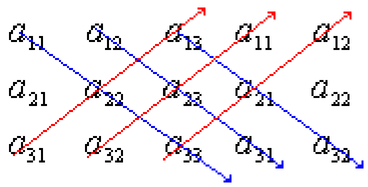
Nota teorica

Ricordiamo che il calcolo di un determinante del terzo ordine si può eseguire in modo elementare con il metodo di Sarrus. Riportiamo di seguito la regola prima di impostare i determinanti relativi al sistema.
IL valore del determinate del terzo ordine è:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$$

Si può ricordare agevolmente lo sviluppo realizzando la seguente tabella



ed osservando che i primi tre prodotti sono ottenuti moltiplicando gli elementi che si trovano sulle diagonali discendenti (colorate in blu) mentre i tre prodotti del secondo gruppo si ottengono dagli elementi che si trovano sulle diagonali ascendenti (colorate in rosso).
Ciò premesso impostiamo e riportiamo i valori dei quattro determinanti necessari alla risoluzione del sistema.

(1) Facciamo notare che questa conclusione non è immediata per chi non conosce ancora la teoria delle equazioni di secondo grado. Tuttavia l'allievo che conosca bene la teoria della scomposizione in fattori sa riconoscere che il trinomio $2a^2-ab+2b^2$ non si può scomporre nel prodotto di due binomi di primo grado a coefficienti reali.

Il primo determinante, detto anche determinante del sistema, si ottiene con i coefficienti delle incognite x, y, z, che, ricordiamo, devono essere scritte nello steso ordine nelle tre equazioni.
Indichiamo con
D: il determinate del sistema;
D_x: il determinante necessario per il calcolo del valore dell'incognita x;
D_y: il determinante necessario per il calcolo del valore dell'incognita y;
D_z: il determinante necessario per il calcolo del valore dell'incognita z;
D_x si ottiene a partire dal determinante D, sostituendo la prima colonna (coeff. di x) con la colonna dei termini noti;
D_y si ottiene a partire dal determinante D, sostituendo la seconda colonna (coeff. di y) con la colonna dei termini noti;
D_z si ottiene a partire dal determinante D, sostituendo la terza colonna (coeff. di z) con la colonna dei termini noti.
I quattro determinanti sono:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -10 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -10 \end{vmatrix} = 8$$

Considerato che il valore del determinante del sistema è diverso da zero, il sistema è determinato e la soluzione è:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}; \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{-4} = -2$$

Torna su

Geometria

Prima Parte del Problema

Indichiamo con x ed y le misure delle dimensioni del rettangolo in questione, con x misura maggiore (vedi Fig.1).
Dall'informazione sul rapporto delle misure dei lati si ha:
$x/y=3/2 \Rightarrow x=3y/2$
Si ricava la seconda relazione che lega le misure x, y con il legame esistente tra il perimetro del rettangolo assegnato e quello del rettangolo trasformato.
Dette x', y' le corrispondenti misure del rettangolo trasformato si sa che

$x'=x+10\%x=11x/10$;
$y'=y-10\%y=9y/10$;

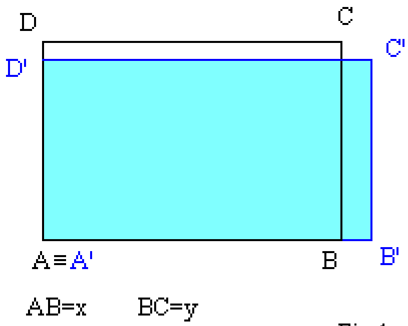


Fig.1

Il perimetro del primo rettangolo è
$2p=2(x+y)$;
quello del secondo rettangolo
$2p'=2(x'+y')=2(11x/10+9y/10)$
L'informazione sui perimetri afferma che
$2p'=2p+2$(metri)
per cui sussiste l'uguaglianza
$2(11x/10+9y/10)= 2(x+y)+2 \Rightarrow 11x/10+9y/10= x+y+1$

Mettendo insieme le due uguaglianze ottenute si ottiene un sistema di due equazioni che va risolto.

Il sistema è $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{11x+9y}{10} = x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ x-y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30m \\ y = 20m \end{cases}$

I lati del rettangolo misurano allora 30m e 20m. (Fig.1)

Seconda Parte del Problema

Ritornando al rettangolo di partenza ABCD, con AB=30m, BC=20m, dobbiamo condurre la corda PQ parallela al lato BC in modo che i due rettangoli ottenuti abbiano aree che stanno nel rapporto 3/2. In riferimento alla Fig.2, poniamo AP=x e quindi PB=30-x. I valori delle aree dei due rettangoli sono:
Area(APQB)=20x;
Area(PBCQ)=(30-x)x
Deve essere verificata l'uguaglianza

$$\frac{20\cdot(30-x)}{20\cdot x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 5x{=}60 \Rightarrow x{=}12\text{m}$$

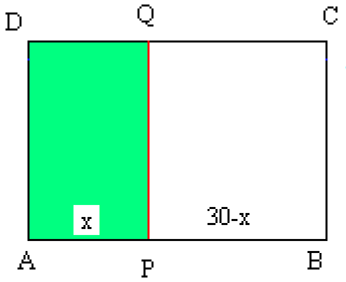


Fig.2

La corda PQ deve essere dunque condotta in modo che AP=12m. Naturalmente, se si sceglie PB=12m la soluzione va ancora bene: in questo caso il rettangolo di area maggiore è APQB. In Fig.2 è rappresentata la soluzione con AP=12m, PB=18m.

Torna su

Informatica

Riportiamo la codifica in Turbo Pascal del programma che risolve il problema assegnato.

```
Program DiscSist;
(* Discutere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite*)
 Uses crt;
 var a1,a2,b1,b2,c1,c2,D,Dx,Dy,x,y:Real;
 Begin
   Clrscr;
   Writeln(' questo programma permette di discutere e risolvere un sistema');
   Writeln(' di primo grado di  due equazioni già  ridotto alla forma normale');
   Writeln('A1x+B1y=C1');
   Writeln('A2x+B2y=C2');
   Writeln('Inserisci ora i coefficienti A1,B1,C1,A2,B2,C2 premendo INVIO dopo');
   Writeln(' ogni dato numerico');
   Write('A1 = ');Read(A1); Write('   B1 = ');Read(B1); Write('   C1 = ');Readln(C1);
   Write('A2 = ');Read(A2); Write('   B2 = ');Read(B2); Write('   C2 = ');Readln(C2);
   (* calcolo dei determinanti del sistema *)
   D:=A1*B2-A2*B1;
   Dx:=C1*B2-C2*B1;
   Dy:=A1*C2-A2*C1;
   (* Discussione e soluzione *)
   If D<>0 then
     Begin
       x:=Dx/D; y:=Dy/D;
       Writeln('x= ',x:6:3);
       Writeln('y= ',y:6:3);
    End
```

```
Else If (Dx<>0) Or (Dy<>0) then
        Writeln(' Il sistema non ha soluzioni')
    Else Writeln(' Ilsistema è indeterminato: ammette infinite soluzioni.');
Textcolor(2+Blink);
Writeln('Premi un tasto per chiudere.');
Repeat Until Keypressed;
End.
```

Torna su