# Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"

Tricase

Tempo di lavoro
120 minuti

## Oggetto: compito in Classe 2D/PNI

**Argomenti**: **Geometria**: Equivalenza delle figure piane – **Algebra**: Equazioni di secondo grado- Regola di Cartesio - Equazioni parametriche.

| Collegamenti alla soluzione | |
|---|---|
| geometria | Problema_1-Testo Soluzione |
| | Problema_2-Testo Soluzione |
| | Problema_3-Testo Soluzione |
| | Problema_4-Testo Soluzione |
| Algebra | Es_1-Testo Sol_1.1 ;Sol_1.2 ;Sol_1.3 |
| | Es_2-Testo Soluzione- Osservazione |
| | Es_3-Testo Soluzione |
| | Es_4-Testo Soluzione Regola di Cartesio Sol_4.1; Sol_4.2; Sol_4.3; Sol_4.4 |

### Geometria

**Problema_1** Sia ABC un triangolo qualsiasi. Dimostrare le seguenti proposizioni:

**1.1** Una mediana divide il triangolo in due parti equiestese.

**1.2** Considerata la mediana AM e detto O il suo punto medio, il triangolo AOB è equiesteso alla quarta parte del triangolo ABC.

**1.3** Le tre mediane dividono il triangolo in sei triangoli equiestesi.

**Problema_2** Dimostrare che un esagono regolare inscritto in una circonferenza ha estensione doppia del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.

**Problema_3** -Considerato un triangolo ABC, descrivere il procedimento che permette di trasformarlo in un triangolo isoscele equiesteso APQ avente $AP = \frac{4}{5}AB$, con AP contenuto in AB.

**Problema_4**- Se ABCD e ABEF sono due parallelogrammi che giacciono nello stesso piano da parti opposte rispetto al lato comune AB, dimostrare che il quadrilatero DCEF è equiesteso alla somma dei due parallelogrammi dati.

### Algebra

**Es_1)** (m) Risolvere le seguenti equazioni

1.1 $\left(\sqrt{2}-x\right)^2-4=0$  1.2 $12x^2-4mx-m^2=0$  1.3 $x^2-(a+b)x+2b(a-b)=0$

**Es_2)** (m) Scrivere un'equazione di secondo grado avente per radici i seguenti numeri

$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}-2}$; $x_2=\sqrt{3}+2$ riducendola alla forma normale. Successivamente risolvere l'equazione ottenuta.

**Es_3)** (m) Nell'equazione di seguito indicata determinare il valore del parametro ***k*** affinché una delle due radici sia ***x***=-1 e, ridotta l'equazione alla forma normale, risolverla per determinare la seconda radice:

$$\frac{4}{4x^2-20x+25}=\frac{3}{2x-5}+\frac{k}{5x-2}$$

**Es_4)** (m) Considerata l'equazione parametrica

$$kx^2+(5-2k)x+k-3=0$$

risolvere i quesiti che seguono.

4.1 Discutere la realtà ed il segno delle radici al variare del parametro.

4.2 Stabilire per quali valori del parametro ***k*** le radici sono concordi.

4.3 Stabilire per quale valore del parametro ***k*** le radici sono reali e la somma dei loro quadrati è 5.

4.4 Stabilire per quali valori del parametro ***k*** fra le radici sussiste la relazione $x_1=x_2+1$ e precisare se le stesse sono reali.

Autore Luigi Lecci

# SOLUZIONE

## Geometria

Problema_1

1.1 In Fig.1 è rappresentato il triangolo ABC del quale è stata tracciata la mediana AM relativa al lato BC. Occorre provare che i due triangoli AMB, AMC sono equiestesi. All'uopo basta considerare i due suddetti triangoli sulle rispettive basi MB, MC ed osservare che esse sono congruenti perché M è punto medio tra B e C e che le altezze relative alle stesse in figura coincidono con AH, segmento di perpendicolare condotto dal vertice A al lato BC. I due triangoli, avendo basi congruenti e la stessa altezza relativa sono equiestesi.

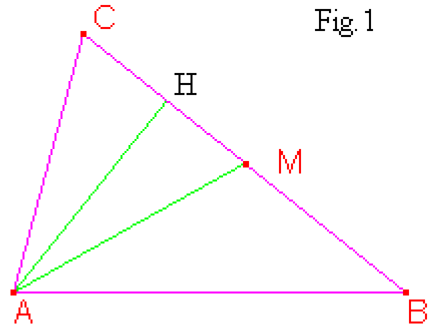


Fig. 1

1.2 In Fig.2 è rappresentato il triangolo di riferimento. Al fine di dimostrare la tesi basta osservare che con ragionamento analogo a quello svolto nel precedente punto possiamo affermare che il triangolo AOB è equiesteso al triangolo MOB perché OB è mediana del triangolo AMB relativa al lato AM; d'altra parte il triangolo AMB è equiesteso al triangolo AMC e quindi è equiesteso alla metà del triangolo ABC $\Rightarrow$

$$AOB \doteq \frac{1}{2} AMB \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} ABC \doteq \frac{1}{4} ABC$$

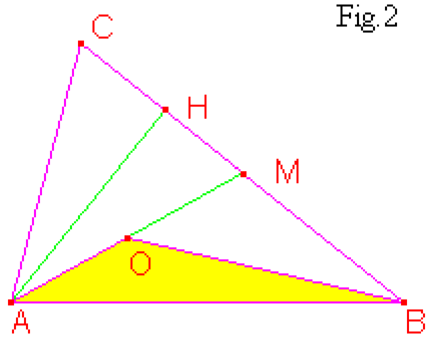


Fig. 2

1.3 In Fig.3 il triangolo ABC è stato scomposto con le mediane AM, BP,CN nei sei triangoli ANG, BNG, BMG, CMG, CPG, APG. Vogliamo provare che essi sono equiestesi. Per la dimostrazione della tesi dobbiamo ricordare **che il baricentro G del triangolo divide ciascuna mediana in due segmenti dei quali quello che contiene il vertice è doppio dell'altro**, quindi AG=2GM, BG=2GP, CG=2GN.

Ciò premesso osserviamo che:

- i triangoli AGN, GNB se considerati sulle basi AN, NB, che sono congruenti, risultano avere come altezza il segmento di perpendicolare condotto da G alla retta delle basi, dunque la stessa altezza e perciò sono equiestesi e ciascuno dei due è equiesteso alla metà del triangolo ABG;
- considerando ora i due triangoli ABG, GBM sulle basi AG, GM, poiché le altezze relative coincidono e AG=2GM deduciamo che $GBM \doteq \frac{1}{2} AGB$ e quindi si ha anche $GBM \doteq GNB$.

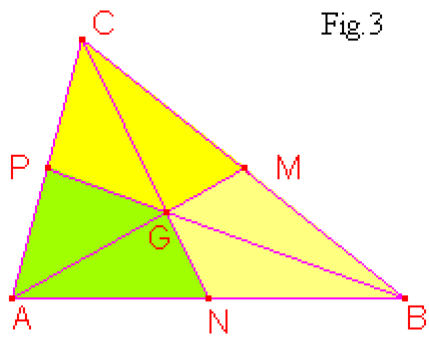


Fig. 3

In modo analogo si prova che $APG \doteq CPG$, considerati sulle basi congruenti AP, CP e che , ancora dall'essere AG=2GM, si ha anche $CMG \doteq \frac{1}{2} ACG$, dunque $CMG \doteq CPG \doteq APG$.
dunque $CMG \doteq CPG \doteq APG$. Infine, considerati i triangoli BMG, CMG sulle basi congruenti BM, CM, risultano equiestesi perché le altezze relative coincidono. A questo punto per transitività si acquisisce la tesi:

$$AGN \doteq GNB \doteq BMG \doteq CMG \doteq CPG \doteq APG.$$

**Problema_2**

In Fig.4 è rappresentato l'esagono regolare ABCDEF inscritto nella circonferenza di centro O ed il triangolo equilatero ACE. Sono stati anche indicati con tratteggio i raggi OA, OC, OE. Per provare la tesi che l'esagono è equiesteso al doppio del triangolo equilatero basta ricordare che il lato dell'esagono regolare ha la stessa misura del raggio della circonferenza in cui è inscritto ed osservare che i sei triangoli isosceli ABC, AOC, AFE, AOE, CDE, COE sono tutti congruenti per il primo criterio (i due lati congruenti sono quelli aventi misura uguale al raggio e gli angoli compresi hanno ampiezza 120°). Ciò detto, il triangolo è composto da tre dei suddetti triangoli, mentre l'esagono è composto da tutti e sei i triangoli; quindi l'esagono ha superficie doppia di quella del triangolo.

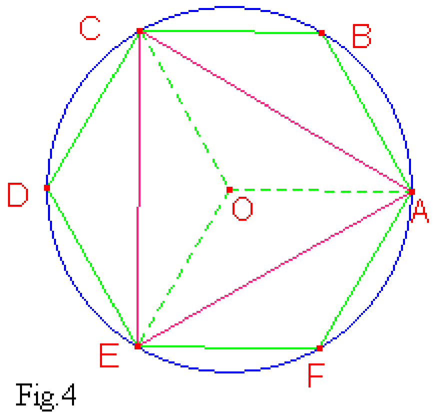


Fig.4

**Problema_3**

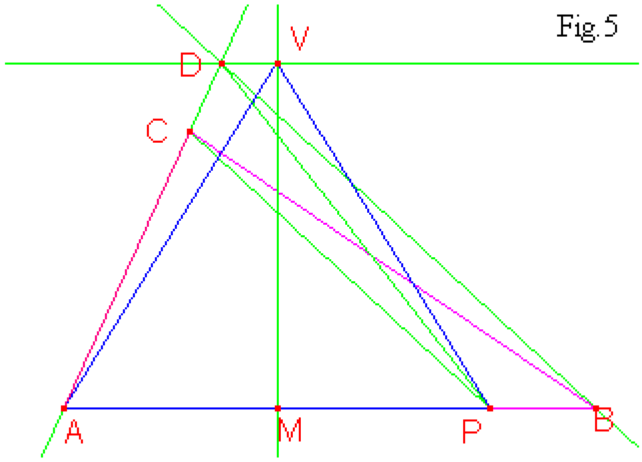


Fig.5

In Fig.5 è indicato il percorso seguito per trasformare il triangolo originario ABC nel triangolo isoscele equiesteso APV.
Illustriamo il procedimento.

1) Si individua il punto P sulla base AB in modo che sia rispettata la condizione AP=4AB/5.
2) Si uniscono i punti C, P e da B si manda la parallela al segmento CP che incontra la retta del lato AC nel punto D.
3) Unendo il punto D con P si ottiene il triangolo APD che è equiesteso al triangolo ABC. Infatti, considerando come parte comune ai due triangoli il triangolo ACP, si osserva che il triangolo ABC si ottiene unendo ad ACP il triangolo CPB, mentre il triangolo ADP si ottiene unendo al triangolo ACP il triangolo DCP. Ora i due triangoli DCP, CPB, considerati sulla base comune CP, sono equiestesi perché le altezze corrispondenti a CP rappresentano la distanza tra le rette parallele [C;P], [B;D] e com'è noto due triangoli aventi basi congruenti ed altezze relative congruenti sono equiestesi. CVD.

**Problema_4**

Osserviamo la Fig.6 dove sono rappresentati i due parallelogrammi ABCD, ABEF disposti secondo le indicazioni del testo.
Notiamo subito che il quadrilatero DCEF è un parallelogramma perché ha i due lati opposti DC, FE paralleli e congruenti. Per dimostrare che questo poligono è equiesteso all'unione dei due parallelogrammi di partenza ABCD, ABEF, faremo vedere che la figura ottenuta con questi due parallelogrammi è equicomposta rispetto al parallelogramma DCEF.
Infatti, la figura data dall'unione dei due parallelogrammi ABCD, ABEF ha in comune con il parallelogramma DCEF il pentagono DCBEF e si verifica che il parallelogramma DCEF si ottiene unendo a detto pentagono il triangolo BCE, mentre unendo

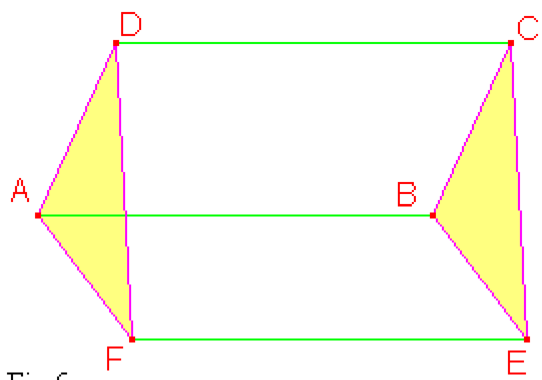


Fig.6

allo stesso pentagono il triangolo ADF si ottiene ABCD∪ABEF; è sufficiente allora provare che i due triangoli BCE, ADF sono equiestesi per acquisire la tesi. In realtà questi triangoli sono addirittura congruenti per il terzo criterio. Infatti, risulta:

AD≅BC, perché lati opposti del parallelogramma ABCD;
AF≅BE, perché lati opposti del parallelogramma ABEF;
DF≅CE, perché lati opposti del parallelogramma DCEF;

quindi i due triangoli sono congruenti. Si conclude che la figura data dall'unione dei due parallelogrammi ABCD, ABEF è equiestesa al parallelogramma DCEF. C.V.D.

**Algebra**

Es.1)

1.1 L'equazione si risolve immediatamente come segue

$$\left(\sqrt{2}-x\right)^2-4=0 \Rightarrow \sqrt{2}-x=\pm 2 \Rightarrow x_1=\sqrt{2}-2; x_2=\sqrt{2}+2$$

1.2 L'equazione in esame è letterale, però è di secondo grado per ogni valore del parametro **m** perché il coefficiente del termine noto è diverso da zero.
Osservato che il coefficiente del termine di primo grado è pari si può risolvere velocemente l'equazione applicando la formula ridotta:

$$12x^2-4mx-m^2=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{2m\pm\sqrt{4m^2+16m^2}}{12}=\frac{2m\pm 4m}{12} \Rightarrow x_1=-\frac{m}{6}; x_1=\frac{m}{2}$$

1.3 L'equazione è letterale e contiene due parametri. La risolviamo di seguito calcolando prima il valore del discriminante.

$$x^2-(a+b)x+2b(a-b)=0 \Rightarrow \Delta=(a+b)^2-8b(a-b)=(a-3b)^2$$

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-3b)^2}}{2}=\frac{a+b\pm(a-3b)}{2} \Rightarrow$$

$$x_1=\frac{a+b+a-3b}{2}=\frac{2(a-b)}{2}=a-b; \qquad x_2=\frac{a+b-a+3b}{2}=\frac{4b}{2}=2b$$

Es.2) Ricordiamo che la più semplice equazione di secondo grado che ammette come radici due numeri assegnati $x_1$, $x_2$, si può ricondurre alla forma

$$x^2-sx+p=0\text{, dove } s=x_1+x_2,\ p=x_1\cdot x_2.$$

Ciò premesso troviamo i valori della somma e del prodotto delle radici.

$$x_1+x_2=\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\sqrt{3}+2=\frac{\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}+\sqrt{3}+2 \Rightarrow$$

$$x_1+x_2=\frac{\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}+\sqrt{3}+2=-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2=0;$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}=\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}{\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}=-7-4\sqrt{3}$$

Un'equazione che soddisfa le richieste del problema è dunque

$$x^2-7-4\sqrt{3}=0$$

**Risoluzione dell'equazione**

L'equazione manca del termine di primo grado e per le sue soluzioni si ha:

$$x^2-7-4\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$$

Le espressioni algebriche delle radici sono due radicali doppi, che sono però "sviluppabili", cioè si possono scrivere come somma di due radicali semplici. Si ha

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}+\sqrt{\frac{6}{2}}=2+\sqrt{3}$$

Concludiamo che le due radici dell'equazione sono

$$x_1=\sqrt{3}+2;\ x_2=-\sqrt{3}-2$$

**Osservazione**

Tenendo conto del percorso seguito per impostare la forma algebrica dell'equazione avente come radici i due valori assegnati, osservando l'espressione del prodotto degli stessi, con un po' di fantasia ci si poteva accorgere che il radicando del radicale doppio è lo sviluppo del quadrato di un binomio, precisamente che risulta

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

ed ottenere più velocemente le soluzioni dell'equazione in esame senza dover affrontare lo sviluppo del radicale doppio.

Es_3) Per definizione un numero è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita verifica l'uguaglianza richiesta. Per determinare il valore del parametro **k** per cui ***x* = -1** è soluzione dell'equazione proposta si deve perciò richiedere che sia soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$\frac{4}{4(-1)^2-20(-1)+25}=\frac{3}{2(-1)-5}+\frac{k}{5(-1)-2}\Rightarrow k=-\frac{25}{7}$$

Sostituendo nell'equazione parametrica il valore trovato al parametro k si ottiene l'equazione

$$\frac{4}{4x^2-20x+25}=\frac{3}{2x-5}-\frac{25}{7(5x-2)}$$

che si può scrivere anche nella forma

$$\frac{4}{(2x-5)^2}=\frac{3}{2x-5}-\frac{25}{7(5x-2)};$$

ridotta alla forma normale diventa

$110x^2-249x-359=0$, con le condizione d'equivalenza $x\neq\frac{5}{2}$, $x\neq\frac{2}{5}$.

Risolvendo l'equazione si ricavano le due radici $x_1=-1$, $x_2=\frac{359}{110}$ che sono accettabili perché verificano le condizioni indicate $x\neq\frac{5}{2}$, $x\neq\frac{2}{5}$ .

Es_4)- Equazione parametrica

$$kx^2+(5-2k)x+k-3=0$$

4.1 Prima parte: realtà delle radici

Ricordiamo che per stabilire la realtà delle radici di un'equazione di secondo grado ridotta alla forma normale

$ax^2+bx+c=0$

occorre determinare il valore del suo discriminante : $\Delta=b^2-4ac$ e sussistono i tre casi riportati in Tab.4.1; studiamo perciò la disequazione Δ≥0 nel parametro *k*.

$\Delta=(5-2k)^2-4k(k-3)=-8k+25\geq 0$

| **Tab.4.1** | Discussione di un'equazione di secondo grado |
|---|---|
| Caso | $ax^2+bx+c=0$ |
| $\Delta>0$ | L'equazione ammette due radici reali e distinte. |
| $\Delta=0$ | L'equazione ammette due radici reali coincidenti. |
| $\Delta<0$ | L'equazione ammette due radici complesse coniugate. |

La disequazione è soddisfatta per $k\leq\frac{25}{8}$. (4.1.1)

Possiamo allora affermare che:

per $\forall k<\frac{25}{8}$ l'equazione ammette due radici reali distinte;

con $k=\frac{25}{8}$ l'equazione ammette due radici reali coincidenti;

per $\quad \forall k > \frac{25}{8}$ $\quad$ l'equazione ammette due radici complesse coniugate.

## Seconda parte: Segno delle radici

Ricordiamo che **ha senso parlare di segno di un numero se questo è reale**, per cui lo studio del segno delle radici si deve limitare ai valori del parametro k per i quali risulta $\Delta \geq 0$, cioè allorquando le radici dell'equazione parametrica sono reali.
Per studiare il segno delle radici si fa ricorso alla "**regola di Cartesio**" che sfrutta il valore del discriminante ed i segni dei coefficienti **a,b,c** dell'equazione di secondo grado al variare del parametro **k**, nonché i concetti di permanenza ( due segni consecutivi uguali) e di variazione ( due segni consecutivi diversi) per i segni dei coefficienti.

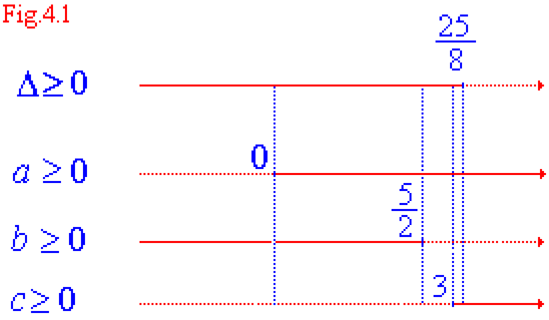
**Studio del segno dei coefficienti**

$kx^2 + (5-2k)x + k - 3 = 0$

a=k≥0⇔ k≥0;
b=5-2k ≥0 ⇔k≤5/2;
c=k-3≥0⇔k≥3

Realizziamo un grafico comparativo per i segni di coefficienti e del discriminante. Il disegno è riportato in Fig.4.1 e riferendoci ad esso discutiamo il segno delle radici dell'equazione al variare del parametro. I diversi casi discussi sono raccolti nella tabella Tab.4.2.

Fig.4.1




| **Tab.4.2** | | **Discussione della realtà e del segno delle radici dell'equazione** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **k** | **Δ** | Coefficienti **a**, **b**, **c** | | | **Proprietà delle radici** | |
| k<0 | Δ>0 | a<br>- | b<br>+ | c<br>- | Si hanno due radici reali distinte entrambe positive | |
| k=0 | Δ>0 | a=0 | b<br>+ | c<br>- | L'equazione diventa di primo grado e l'unica radice è positiva | |
| $0<k<\frac{5}{2}$ | Δ>0 | a<br>+ | b<br>+ | c<br>- | Si hanno due radici reali; poiché la permanenza precede la variazione la radice negativa ha il modulo maggiore. | $x_1<0$; $x_2>0$<br>$\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$ |
| k=5/2 | Δ>0 | a<br>+ | b=0 | c<br>- | L'equazione diventa pura; le due radici sono reali ed opposte. | $x_1 = -x_2$ |
| $\frac{5}{2}<k<3$ | Δ>0 | a<br>+ | b<br>- | c<br>- | Si hanno due radici reali distinte; poiché la variazione precede la permanenza quella positiva ha modulo maggiore. | $x_1>0$; $x_2<0$<br>$\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$ |
| k=3 | Δ>0 | a<br>+ | b<br>- | c=0 | L'equazione diventa spuria; una radice è nulla e l'altra, essendoci una variazione, è positiva. | $x_1=0$; $x_2>0$ |
| $3<k<\frac{25}{8}$ | Δ>0 | a<br>+ | b<br>- | c<br>+ | Si hanno due radici reali positive distinte. | $x_1>0$; $x_2>0$ ;<br>$x_1 \neq x_2$ |
| $k=\frac{25}{8}$ | Δ=0 | a<br>+ | b<br>- | c<br>+ | Si hanno due radici reali positive coincidenti. | $x_1= x_2>0$ |
| $k>\frac{25}{8}$ | Δ<0 | | | | L'equazione ammette due radici complesse coniugate. | |

4.2 Se **le radici dell'equazione sono concordi** (quest'espressione ha senso solo nel campo dei numeri reali) allora il loro prodotto è positivo e viceversa; pertanto per risolvere il quesito si impone la condizione

$$x_1 \cdot x_2 > 0. \qquad (4.2.1)$$

Tenendo conto della relazione esistente tra i coefficienti di un'equazione di secondo grado ridotta alla forma normale e le radici della stessa relativamente al prodotto:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \qquad (4.2.2),$$

la condizione diventa

$\frac{k-3}{k} > 0$ che è soddisfatta per $\forall k \in ]-\infty; 0[ \cup ]3; +\infty[$;

occorre, però, tener presente che le radici devono essere reali e che dunque deve essere soddisfatta anche la condizione $\Delta \geq 0$, le cui soluzioni sono indicate dalla (4.1.1). Dal confronto delle due condizioni emerge che i valori del parametro reale $k$ per i quali le radici sono reali e concordi sono quelli dell'insieme

$$S = ]-\infty; 0[ \cup \left]3; \frac{25}{8}\right]$$

4.3 La somma dei quadrati delle radici si può scrivere in modo da far comparire la somma ed il prodotto delle stesse come segue(1):

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 \qquad (4.3.1)$$

e ciò al fine di utilizzare le note relazioni esistenti tra le radici ed i coefficienti dell'equazione di secondo grado.

Per la somma delle radici sussiste la relazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad (4.3.2)$$

e quindi tendendo conto della precedente relazione (4.2.2) la (4.3.1) si può esprimere nella forma seguente

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

In riferimento all'equazione parametrica in esame la relazione da studiare è

$$x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{(5-2k)^2}{k^2} - \frac{2(k-3)}{k} = 5 \Leftrightarrow 3k^2 + 14k - 25 = 0, \text{ con } k \neq 0.$$

Risolvendo l'equazione ottenuta si ricavano i valori

$k_1 = -\frac{2\sqrt{31}+7}{3}$, $k_2 = \frac{2\sqrt{31}-7}{3}$ che sono entrambi minori di $\frac{25}{8} \Rightarrow \Delta > 0$ e dunque assegnando a $k$ uno dei due valori si ottiene un'equazione di secondo grado le cui radici sono reali e la somma dei loro quadrati vale $5$.

4.4 Per risolvere il quesito occorre impostare il seguente sistema di equazioni

$$kx^2 + (5-2k)x + k - 3 = 0$$

---

(1) La relazione indicata è nota come "prima formula di Waring"; la seconda formula è relativa alla somma di due cubi ed è: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$; si continua con la formula per la somma delle quarte potenze $x_1^4 + x_2^4 = \ldots\ldots$ ecc..

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2k-5}{k} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{k-3}{4} \end{cases}$$

Operando sulle prime due equazioni del sistema si possono esprimere $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ in funzione del parametro **k**; sostituendo le espressioni trovate nella terza equazione si ricava un'equazione di secondo grado che risolta permette di determinare i valori del parametro per i quali è verificata la condizione richiesta. Dopo semplici passaggi algebrici il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3k-5}{2k} \\ x_2 = \dfrac{k-5}{2k} \\ \dfrac{3k-5}{2k} \cdot \dfrac{k-5}{2k} = \dfrac{k-3}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{3k-5}{2k} \cdot \frac{k-5}{2k} = \frac{k-3}{4} \Rightarrow k^2 + 8k - 25 = 0$$

Si ricavano i due valori $k_1 = -4 - \sqrt{41}, k_2 = -4 - \sqrt{41}$ che sono minori di $\dfrac{25}{8}$, dunque per ciascuno di essi si ricava un'equazione di secondo grado avente discriminante positivo e pertanto le radici corrispondenti sono reali.