Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"
Tricase

Tempo di lavoro
120 minuti

Oggetto: compito in Classe 2D/PNI

Argomenti: Radicali – Sistema di equazioni e disequazioni a coefficienti irrazionali - Disequazioni razionali intere, fratte e parametriche. Geometria: Problemi sulla circonferenza

Soluzione

Algebra

Es 1) Stabilire il valore di verità della seguente disuguaglianza numerica

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Es 2) Semplificare la seguente espressione con radicali

$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} : \sqrt[3]{\frac{x^3-x^4}{x^2+2x+1}}\right)\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}}$$

Es 3) Considerate le espressioni algebriche:

$A(x)=\sqrt{2}x^2-2x$; $\quad B(x)=x-|x-1|$; $\quad C(x)=2x^2-3x+1$;

$D(x)=2x^4+5x^3-8x^2-20x$

Risolvere le seguenti disequazioni

3.1 $A(x)\ge 0$ 3.2 $B(x)>0$ 3.3 $C(x)\le 0$ 3.4 $D(x)<0$

3.5 $\dfrac{B(x)}{C(x)}<0$

Es 4) **4.1** Discutere la seguente disequazione parametrica: $\dfrac{3-x}{2x-a+2}>0$, con $a\in\mathbf{R}$

4.2 Stabilire per quali valori del parametro a reale positivo la seguente disequazione $\sqrt{6}x-a\sqrt{3}+1>0$, ammette tra le sue soluzioni il valore $x=2$ ma non il valore $x=1$.

Es 5) Risolvere il seguente sistema di equazioni
$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{6}}+y=1-k\\[2mm]\dfrac{x}{\sqrt{2}}-y=k-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Geometria

Problema 1(m): Considerato il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC e con il cateto AB<AC, disegnare la circonferenza circoscritta al triangolo, indicando con O il suo centro; si tracci la bisettrice AK dell'angolo BAC e sia D il secondo punto in cui la sua retta incontra la circonferenza suddetta. Condurre l'altezza AH del triangolo ABC.
Dimostrare che i segmenti OD ed AH sono paralleli.

Quesito
Nel testo si richiede che il triangolo rettangolo ABC abbia i cateti non congruenti. Come sono disposti i segmenti OD, AH se i cateti sono congruenti ?

Problema 2(m)
In una circonferenza tracciare una corda AB non passante per il centro. Detto O il punto medio della corda, considerare due punti P, Q sulla corda AB e disposti simmetricamente rispetto ad O, quindi tracciare per P e Q le perpendicolari alla corda AB, indicando con M, N i punti d'intersezione con uno dei due archi della circonferenza sottesi dalla corda.
Dimostrare che i segmenti PM, NQ sono congruenti.

Autore Luigi Lecci\Liceo Scientifico "G. Stampacchia"- Tricase (LE) – 0833-544020

Soluzione

Algebra

Es_1) *Stabilire il valore di verità della seguente disuguaglianza numerica*

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Vogliamo dimostrare che **la disuguaglianza è falsa** e lo faremo elaborando le espressioni radicali presenti ai due membri riconducendole a due radicali equivalenti aventi lo stesso indice. Sussistono le seguenti equivalenze:

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} > \sqrt[3]{\frac{3^3}{\left(2^2\right)^3}\cdot\frac{2^3}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} > \sqrt[3]{\frac{3^2}{2^3}\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{4}{3}} > \sqrt[6]{\frac{\left(3^2\right)^2}{\left(2^3\right)^2}\cdot\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{2^5}{3^4}} > \sqrt[6]{\frac{3^5}{2^7}} \Leftrightarrow \frac{2^5}{3^4} > \frac{3^5}{2^7} \Leftrightarrow 2^{12} > 3^9 \Leftrightarrow 4096 > 19683\,.$$

Poiché l'ultima disuguaglianza è manifestamente falsa, concludiamo che è falsa la disuguaglianza di partenza.

Es_2) *Semplificare la seguente espressione con radicali*

$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}:\sqrt[3]{\frac{x^3-x^4}{x^2+2x+1}}\right)\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}}$$

Soluzione

Come primo passaggio scomponiamo in fattori gli argomenti dei singoli radicali e trasformiamo l'ultimo applicando la proprietà della **radice di radice**.

$$\left[\sqrt{\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}}:\sqrt[3]{\frac{x^3(1-x)}{(x+1)^2}}\right]\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{x+1}}$$

Dalla forma ottenuta si evince che per l'esistenza dell'espressione nel campo reale devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$x\neq 0;\, x-1>0;\, x+1>0 \Rightarrow x>1$$

Il dominio di definizione dell'espressione algebrica è pertanto **D =]1;+∞[**. Prima di passare alla trasformazione delle diverse espressioni algebriche è opportuno osservare che nel secondo radicale compare il binomio 1-x che con $x\in$D assume valori negativi. Di ciò si deve tener conto nel corso delle elaborazioni . Elaboriamo dunque l'espressione radicale applicando le proprietà dei radicali, con $x\in$D.

Cominciano con il trasformare la radice cubica ponendo

$\sqrt[3]{\frac{x^3(1-x)}{(x+1)^2}} = -\sqrt[3]{\frac{x^3(x-1)}{(x+1)^2}}$ e procediamo

$$\left[-\sqrt{\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}}:\sqrt[3]{\frac{x^3(x-1)}{(x+1)^2}}\right]\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{x+1}} =$$

$$-\sqrt[6]{\left[\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right]^3}\cdot\sqrt[6]{\left[\frac{(x+1)^2}{x^3(x-1)}\right]^2}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{x+1}} =$$

$$-\sqrt[6]{\frac{x^6}{(x-1)^3(x+1)^3}\cdot\frac{(x+1)^4}{x^6(x-1)^2}}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{x+1}} = -\sqrt[6]{\frac{x+1}{(x-1)^5}}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{x+1}} =$$

$$-\frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{(x-1)^5}}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x+1}}=-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[6]{(x-1)^5}}=-\sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{(x-1)^5}}=-\sqrt[6]{\frac{1}{(x-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Es_3) *Considerate le espressioni algebriche:*

$A(x)=\sqrt{2}x^2-2x$; $\quad B(x)=x-|x-1|$; $\quad C(x)=2x^2-3x+1$;

$D(x)=2x^4+5x^3-8x^2-20x$

risolvere le seguenti disequazioni

3.1 $A(x)\geq 0$ $\quad$ *3.2* $B(x)>0$ $\quad$ *3.3* $C(x)\leq 0$ $\quad$ *3.4* $D(x)<0$

3.5 $\dfrac{B(x)}{C(x)}<0$

3.1 $A(x)=\sqrt{2}x^2-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}x-2\right)\geq 0$

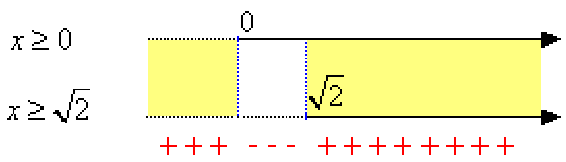
Si determinano le soluzioni delle due disequazioni elementari $x\geq 0, \sqrt{2}x-2\geq 0$ e si mettono a confronto per determinare il segno del prodotto $x\left(\sqrt{2}x-2\right)$.

$\sqrt{2}x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\sqrt{2}$

In Fig.1 è riportato lo studio del segno di ciascun fattore ed il segno del prodotto degli stessi; l'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli indicati in colore. Dunque:

$S=\left]-\infty;0\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

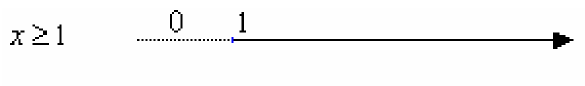
Fig.1 - Segno del prodotto $x\left(\sqrt{2}x-2\right)$



3.2 $B(x)=x-|x-1|>0$

Per lo studio di questa disequazione è necessario procedere preliminarmente allo studio del segno dell'argomento del valore assoluto.

$x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$



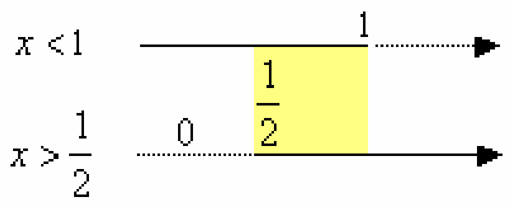
Si deve studiare la disequazione in ciascuno dei due intervalli]-∞;1[, [1;+ ∞[, determinando i rispettivi insiemi di soluzione S_1, S_2; l'insieme S delle soluzioni della disequazione i esame sarà dato dall'insieme unione $S=S_1\cup S_2$.

Nel primo intervallo:

$$\begin{cases}x<1\\ x-\left[-(x-1)\right]>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione nell'intervallo considerato è $S_1=\left]\frac{1}{2};1\right[$

Fig.2 – Insieme delle soluzioni nel primo intervallo.



Nel secondo intervallo:

$$\begin{cases}x\geq 1\\ x-(x-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ 1>0\end{cases}\Rightarrow S_2=\left[1;+\infty\right[$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è: $S=S_1\cup S_2=\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left[1;+\infty\right[=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

3.3 $C(x)\leq 0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1\leq 0$

Si tratta di una disequazione di secondo grado che si può risolvere scomponendo il trinomio nel prodotto di due fattori di primo grado[1]. Per la scomposizione si possono trovare due numeri la cui somma sia uguale al coefficiente del termine di primo grado (S = -3) ed il cui prodotto sia uguale al prodotto del coefficiente del termine di secondo grado con il termine noto (P=2·1=2). I due numeri richiesti sono –2 e –1. Ciò premesso possiamo scrivere:

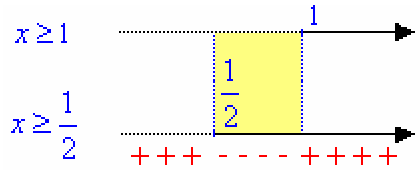
$$2x^2-3x+1=2x^2-2x-x+1=2x(x-1)-(x-1)=(x-1)(2x-1)$$

La disequazione da affrontare diventa allora: $(x-1)(2x-1)\le 0$

Studiando i segni dei singoli fattori e confrontando gli insiemi delle soluzioni si perviene alle soluzioni della disequazione in esame.
In Fig.3 è riportato lo studio dei segni dei singoli fattori, il segno del prodotto ed indicato in colore l'insieme delle soluzioni della disequazione.

$$S=\left[\frac{1}{2};1\right]$$

Fig.3 – Studio dei segni dei fattori ed insieme delle soluzioni della disequazione $2x^2-3x+1\le 0$



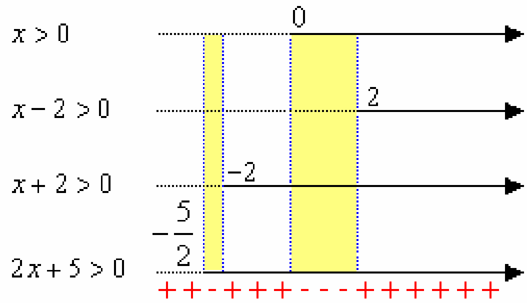
3.4 $D(x)<0 \Leftrightarrow 2x^4+5x^3-8x^2-20x<0$

Si tratta di una disequazione di quarto grado; il polinomio al primo membro si può scomporre come segue:

$$2x^4+5x^3-8x^2-20x=x(2x^3+5x^2-8x-20)=x\left[x^2(2x+5)-4(2x+5)\right]=$$
$$x(2x+5)(x^2-4)=x(2x+5)(x-2)(x+2)$$

e dunque lo studio della disequazione in esame si può eseguire studiando il segno di ciascuno dei quattro fattori di primo grado che abbiamo ottenuto.
In Fig.4 sono riportati i grafici necessari per la determinazione del segno del prodotto dei quattro fattori; il segno del prodotto è riportato al di sotto dell'ultima linea del grafico comparativo. Poiché si richiede l'insieme dei punti reali per i quali risulta $D(x)<0$, dal grafico si deduce che i punti devono appartenere all'insieme $S=\left]-\frac{5}{2};-2\right[\cup\left]0;2\right[$. Questo è quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame.

Fig.4 – Studio del segno del polinomio $D(x)=2x^4+5x^3-8x^2-20x$



3.5 $\dfrac{B(x)}{C(x)}<0$

Si tratta di una disequazione razionale fratta. Per il suo studio si utilizzano i risultati acquisiti con lo studio delle due disequazioni B(x)>0 e C(x)≤0; in particolare, poiché per lo

---

[1] A questo punto del corso gli studenti della seconda classe del Liceo non hanno ancora studiato le equazioni di secondo grado e quindi per la scomposizione in fattori del trinomio possono utilizzare solo gli strumenti acquisiti durante il primo anno, precisamente servirsi del teorema del resto (di Ruffini), oppure trovare due numeri la cui somma sia uguale al coefficiente del termine di primo grado (S = -3) ed il cui prodotto sia uguale al prodotto del coefficiente del termine di secondo grado con il termine noto (P=2·1=2).

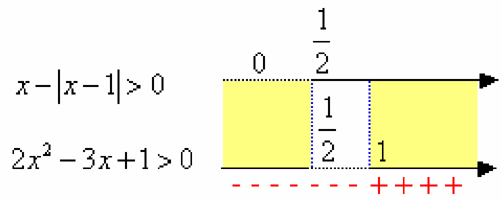
studio necessitano le soluzioni della disequazione C(x)>0, queste saranno date dal complementare (rispetto al campo reale **R**) dell'insieme delle soluzioni della disequazione C(x)≤0.

In Fig.5 è riportato lo studio del il segno del numeratore e del denominatore della frazione, nonché quello della frazione stessa.

L'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è l'unione dei due intervalli in cui il segno della frazione è negativo.

$$S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[$$

Fig.5 – Studio del segno del rapporto B(x)/C(x)<0 .Con colore giallo sono indicate le soluzioni.



Es_4) **4.1** *Discutere la seguente disequazione parametrica:* $\dfrac{3-x}{2x-a+2}>0$, *con* $a\in\mathbf{R}$

4.2 *Stabilire per quali valori del parametro a reale positivo la seguente disequazione* $\sqrt{6}x-a\sqrt{3}+1>0$, *ammette tra le sue soluzioni il valore x = 2 ma non il valore x =1.*

Soluzione

4.1 Si tratta di una disequazione razionale fratta parametrica, nel parametro reale a. Le soluzioni della disequazione sono legate ai valori del parametro. Lo studio si esegue studiando il segno del numeratore e quello del denominato e quindi confrontando i rispettivi domini delle soluzioni; in questa fase di confronto emerge il ruolo svolto dal parametro. Procediamo con ordine.

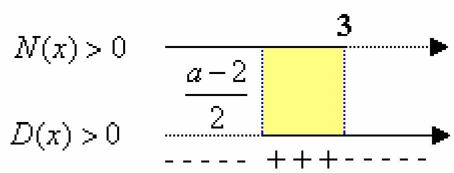
Segno del numeratore: $3-x>0\Leftrightarrow x<3$

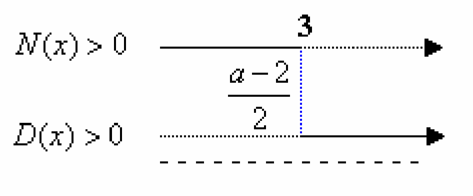
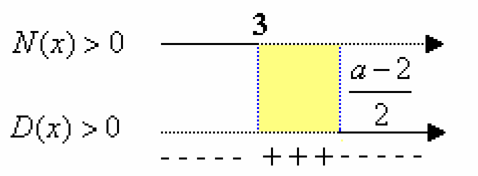
Segno del denominatore: $2x-a+2>0\Leftrightarrow x>\dfrac{a-2}{2}$.

Per poter confrontare gli intervalli di positività e di negatività del numeratore con i corrispondenti intervalli del denominatore è necessario stabilire la posizione sull'asse reale del caposaldo varabile $\dfrac{a-2}{2}$ rispetto al caposaldo fisso 3. Risulta

$$\frac{a-2}{2}>3\Leftrightarrow a>8$$

Si possono verificare tre casi: 1) a<8; 2) a=8; 3) a>8 . Per ciascuno di essi il segno della frazione è riportato nella tabelle riepilogativa che segue.

Discussione del segno della frazione		
Per a<8	Per questi valori del parametro ***a*** risulta $\frac{a-2}{2}$<3 . Il grafico comparativo relativo al segno del numeratore e del denominatore è riportato in Fig.1. Per determinare il segno della frazione si deve eseguire il prodotto dei segni. In colore è indicato l'insieme S delle soluzioni della disequazione: $S=\left]\frac{a-2}{2};3\right[$	 **Fig.1**

Per a=8	In questo caso i due capisaldi coincidono. Il grafico dei segni è riportato in Fig.2. Il segno della frazione per ogni x diverso da 3 è negativo, quindi la disequazione non ha soluzioni S=∅	 Fig.2
Per a>8	In questo caso risulta $\frac{a-2}{2}$>3; il grafico dei segni è riportato in Fig.3; il segno della frazione è positivo nell'insieme $S=\left]3;\frac{a-2}{2}\right[$, che rappresenta pertanto l'insieme delle soluzioni.	 Fig.3

4.2 Stabilire per quali valori del parametro a reale positivo la seguente disequazione $\sqrt{6}x-a\sqrt{3}+1>0$, ammette tra le sue soluzioni il valore $x=2$ ma non il valore $x=1$.

Soluzione

Risolviamo la disequazione:

$$\sqrt{6}x-a\sqrt{3}+1>0 \Leftrightarrow x>\frac{a\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$$

Poiché l'insieme delle soluzione della disequazione è $S=\left]\frac{a\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}};+\infty\right[$, affinché tra le soluzioni ci sia il valore x=2 ma non il valore x =1 il parametro a deve essere soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}<2\\ \dfrac{a\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\sqrt{3}<2\sqrt{6}+1\\ a\sqrt{3}>\sqrt{6}+1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}<a<2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Es_5) *Risolvere il seguente sistema di equazioni* $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{6}}+y=1-k\\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}-y=k-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Osservando le due equazioni si nota che sommandole membro a membro (metodo di riduzione) si elimina l'incognita y e dall'equazione che si ottiene si ricava il valore di x.

$$\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{6}}+\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{2}x-1+\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x=2+\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2+\sqrt{6}}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il valore di y si può dedurre utilizzando la seconda equazione del sistema e sostituendo nella stessa ad x il valore trovato.per sostituzione. Si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}} - y = k - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{2}} - k + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - k + \frac{1}{2} = 1 - k$$

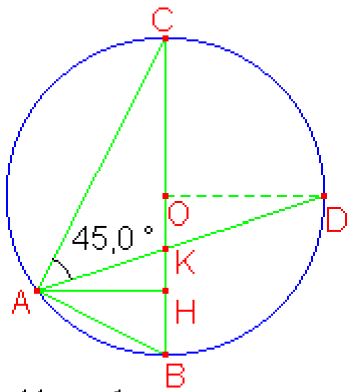
La soluzione del sistema è dunque: $\left(x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; y = 1 - k \right)$

Geometria

Problema_1

Soluzione

Ricordiamo che per ogni triangolo rettangolo il circocentro coincide con il punto medio dell'ipotenusa. Infatti, l'angolo retto è inscritto in una semicirconferenza. Ciò premesso, si osservi che l'angolo alla circonferenza DAC, che misura 45°, ha come angolo al centro corrispondente DOC ed essendo DOC=2DAC segue che DOC misura 90° . Da ciò deriva che DO⊥BC . D'altra parte, anche l'altezza AH è perpendicolare all'ipotenusa BC, AH ⊥BC , quindi DO //AH perché segmenti perpendicolari ad uno stesso segmento.



Problema_1

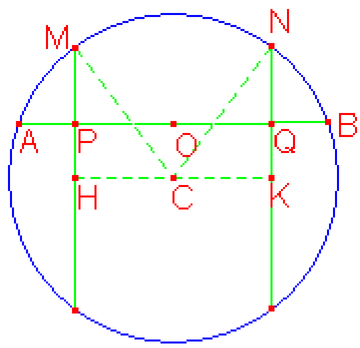
Problema_2

Soluzione

Conduciamo per il centro C della circonferenza la retta perpendicolare alle rette dei segmenti MP, NQ e siano H e K i punti d'intersezione. Consideriamo inoltre i raggi MC, NC.
Osserviamo che i triangoli rettangoli CHM, CKN sono uguali perché hanno uguali i cateti CH, CK perché sono uguali rispettivamente ai segmenti OP, OQ, tra loro uguali per ipotesi; inoltre hanno le ipotenuse uguali perché raggi della stessa circonferenza. Si conclude che MH=KN.
Poiché risulta anche HP = KQ (si noti che il quadrilatero HKQP è un rettangolo), per differenza di segmenti uguali si ricava:

MP=MH-PH=NK-QK=NQ.

La tesi è così acquisita.



Problema 2