

Problema

Nella semicirconferenza di diametro $AB=2r$ si inscrive il triangolo rettangolo isoscele ABC e si prenda sull'arco AC un punto P . Indicata con x l'ampiezza dell'angolo PAC , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare x in modo che risulti $\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{PC} = (\sqrt{6} + 1)r$;
- tracciare il grafico della funzione $f(x) = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{PC}$;
- stabilire per quale valore di x la funzione assume il valore massimo;
- tracciare il grafico della funzione $g(x)$ ottenuta dalla $f(x)$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha; \sqrt{3}r)$, essendo $\alpha = \arctg \sqrt{2}$.

Competenze richieste

- Teoremi sul triangolo rettangolo.
- Teorema della corda.
- Formule di addizione.
- Risoluzione di equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$.
- Applicazione di una traslazione nel piano cartesiano ad una curva.

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura Fig.1

- Il triangolo ABC è rettangolo nel vertice C perché inscritto in una semicirconferenza ed è isoscele, quindi l'angolo BAC ha ampiezza 45° ; l'angolo PAB misura $45^\circ + x$.

Per quanto concerne i valori di x osserviamo che risulta $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$ perché il punto P deve muoversi sull'arco AC e sono consentite le posizioni estreme. Infatti,

se $P \equiv A$ si annulla la misura della corda AP , PC coincide con AC e PB coincide con il diametro AB ;

se $P \equiv C$ allora AP coincide con AC , PC si riduce ad un punto e PB coincide con BC . La somma delle misure dei tre segmenti ha senso qualunque sia la posizione di P sull'arco AC .

Le misure delle corde AP , PC , PB si ottengono velocemente applicando il teorema della corda⁽¹⁾ o i **teoremi relativi ad un triangolo rettangolo**.

Dal triangolo rettangolo APB si ha:

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cos(x + 45^\circ) = 2r \cdot \cos(x + 45^\circ);$$

$$\overline{PB} = \overline{AB} \sin(x + 45^\circ) = 2r \cdot \sin(x + 45^\circ).$$

Determiniamo la misura della corda PC applicando il **teorema della corda**:

$$\overline{PC} = 2r \cdot \sin x$$

A questo punto possiamo scrivere la relazione richiesta nel quesito

$$\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{PC} = (\sqrt{6} + 1)r \text{ in funzione della variabile } x.$$

$$2r \cdot \cos(x + 45^\circ) + 2r \cdot \sin(x + 45^\circ) + 2r \cdot \sin x = (\sqrt{6} + 1)r \quad (\text{a.1})$$

Semplificando il fattore r ed applicando le **formule di addizione per il seno ed il coseno** si ottiene

$$2[(\cos x \cos 45^\circ - \sin x \sin 45^\circ) + (\sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ) + \sin x] = \sqrt{6} + 1 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2} \cos x + 2\sin x = \sqrt{6} + 1 \quad (\text{a.2})$$

La (a.2) è un'equazione lineare in $\sin x$ e $\cos x$ che risolviamo ponendo

$$\cos x = X, \quad \sin x = Y$$

ed impostando quindi il sistema equivalente

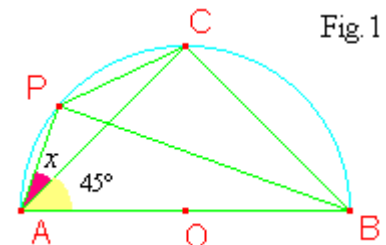


Fig 1

⁽¹⁾ Ricordiamo l'enunciato del teorema: "La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi dalla corda."

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}X + 2Y = \sqrt{6} + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema ottenuto significa ricercare le coordinate cartesiane degli eventuali punti comuni tra la retta $s: 2\sqrt{2}X + 2Y = \sqrt{6} + 1$ e la circonferenza goniometrica $\gamma: X^2 + Y^2 = 1$.

Riportiamo i passi essenziali della risoluzione.

$$\begin{cases} Y = \frac{\sqrt{6}+1}{2} - \sqrt{2}X \\ X^2 + \left(\frac{\sqrt{6}+1}{2} - \sqrt{2}X\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Elaboriamo l'equazione di secondo grado nella variabile X per ricondurla alla forma normale e successivamente determiniamo le sue radici X_1, X_2 ; ciò fatto si determinano i due valori corrispondenti delle ordinate.

$$12X^2 - 4(2\sqrt{3} + \sqrt{2})X + 3 + 2\sqrt{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(X_2 = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow Y_2 = \frac{2\sqrt{6} - 1}{6}\right)$$

Dalle due soluzioni del sistema si risale ai valori corrispondenti dell'ampiezza dell'angolo: dalla prima soluzione si ha $x = 30^\circ$;

dalla seconda soluzione si ha $x = \arcsen\left(\frac{2\sqrt{6} - 1}{6}\right) \approx 40^\circ 31' 43,6''$;

i valori trovati sono entrambi accettabili perché appartengono all'intervallo $[0^\circ; 45^\circ]$ e quindi il quesito in esame ammette due soluzioni, cioè esistono due posizioni diverse del punto P per le quali è soddisfatta la relazione (a.1).

- b) Per quanto precede, ponendo $r=1$, l'espressione analitica della funzione $f(x)$ è

$$f(x) = 2(\sqrt{2} \cos x + \sin x)$$

la cui rappresentazione grafica, ottenuta con l'applicazione Derive, è riportata nella finestra in Fig.2.

- c) La funzione $f(x)$ assume il valore massimo per $x=0,6115109$ radianti, corrispondenti a $35^\circ 3' 17''$, e vale circa 3,464074 come si può leggere anche nella **barra di stato** della finestra riportata in Fig.3 dove sono riportate le coordinate del puntatore (un quadratino) visibile sul punto del grafico di ordinata massima. Nella stessa figura è rappresentata la retta parallela all'asse delle ordinate $x = \pi/4$. Il diagramma della funzione in esame, relativamente al problema geometrico posto, è il tratto compreso tra l'asse delle ordinate e la suddetta retta.
- d) In Fig.4 è riportata la finestra in cui sono rappresentate la curva relativa alla funzione $y=f(x)$ e la curva della funzione $y=g(x)$ ottenuta dalla precedente traslandola del vettore

Fig.2

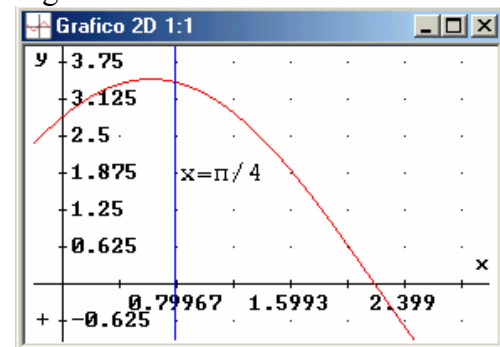
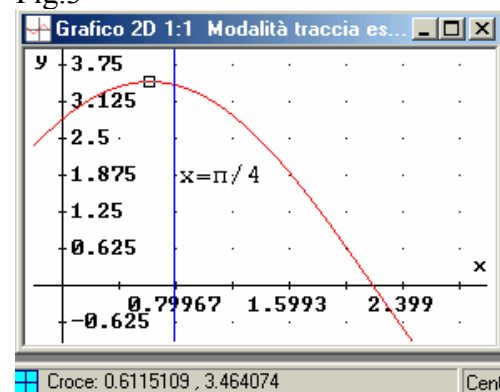


Fig.3



$$\vec{v}(\alpha; \sqrt{3}r).$$

E' bene precisare i passaggi algebrici che consentono di ottenere l'equazione della curva traslata nello stesso riferimento cartesiano in cui è rappresentata $y=f(x)$.

La **traslazione** trasforma il generico punto $P(x;y)$ del piano cartesiano nel punto $P'(x';y')$ le cui coordinate sono

$$x'=x+\alpha; \quad y'=y+\sqrt{3} \quad (\text{d.1})$$

Per ottenere l'equazione cartesiana della curva trasformata è sufficiente ricavare dalle (d.1) le variabili x, y in funzione di x', y' , sostituirle nell'equazione della funzione $y=f(x)$ ed eliminare gli apici. L'equazione ottenuta è quella della curva richiesta.

Riportiamo i passi essenziali:

$$x=x'-\alpha; \quad y=y'-\sqrt{3} \quad (\text{d.2})$$

$$f(x) = 2(\sqrt{2} \cos x + \text{sen} x) \Leftrightarrow y = 2(\sqrt{2} \cos x + \text{sen} x)$$

$$y'-\sqrt{3} = 2(\sqrt{2} \cos(x'-\alpha) + \text{sen}(x'-\alpha)) \Rightarrow y = 2(\sqrt{2} \cos(x-\alpha) + \text{sen}(x-\alpha)) + \sqrt{3}$$

Ponendo $\alpha = \text{arctg}(\sqrt{2})$ si ricava l'equazione cartesiana della curva $y=g(x)$.

Fig.4

