Recupero del debito in Matematica a.s. 2002-03

a.s. 2003-04-Classi Seconde del Liceo Scientifico "G. Stampacchia"- Tricase

Argomenti: Analizzare un Programma in Turbo Pascal- Algebra: Semplificare una frazione algebrica, Quozienti notevoli, Equazione letterale fratta, Sistema di primo grado di due equazioni con risoluzione grafica – Problema di geometria piana.

Collegamenti alla soluzione
Informatica
Algebra Esercizio n.1-Fraz.algebrica Esercizio_n.2-Quozienti notevoli Esercizio_n.3-Equazione letterale Esercizio n.4-Sistema
Geometria-Testo problema Prima Tesi:Punti allineati Seconda Tesi Terza Tesi

Informatica

Dopo aver analizzato il seguente programma in Turbo Pascal compilare la tabella di traccia ed indicare l'output conseguente.

```
Program Recupero;
 Uses Crt;
  Var A,I,S:     Integer;
   Begin
     Clrscr;
     A:=6; S:=0; I:=1;
     While (A<15) do
         Begin
            A:=A+I;
            S:=S+A;
            I:=I+2;
         End;
      Writeln(' A= ',A);
      Writeln('S= ',S);
       Readln;
  End.
```

Torna su

Algebra

1) (m)Semplificare la seguente espressione algebrica: $\dfrac{x^3+x^2y-a^2x-a^2y}{(2x-2a)\cdot(x^2+2xy+y^2)}$

2) (m)Determinare il quoziente ed il resto in ciascuna delle seguenti divisioni

$$(x^4-16y^2):(x^2-4y) \quad ; \quad \left(x^6-\frac{1}{8}\right):\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$

3) Discutere la seguente equazione letterale nell'incognita *x*

$$\frac{a}{a-x}=\frac{3}{x+2}+\frac{3}{ax-x^2+2a-2x}$$

4) (m)Risolvere il sistema di primo grado che segue fornendo la relativa rappresentazione cartesiana: $\begin{cases} 2x+\dfrac{y}{2}=1 \\ \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y+2}{-1}=0 \end{cases}$

Torna su

Geometria

(m) Si consideri il triangolo isoscele ABC, di vertice A e si traccino:

- dal vertice C, la semiretta CX parallela al lato AB e contenuta nel semipiano che contiene il triangolo ABC originato dalla retta della base BC;
- dal vertice B, la semiretta BY parallela al lato AC e contenuta nello stesso semipiano del triangolo rispetto alla retta della base BC.

Si prenda sulla semiretta CX il punto D e sulla semiretta BY il punto E in modo che risulti CD=BE=AB. Dimostrare che:

1) i punti E, A, D sono allineati;
2) il quadrilatero BCDE è un trapezio isoscele;
3) i punti medi dei lati del trapezio BCDE sono i vertici di un rombo.

Torna su

Soluzione

Informatica

Program Recupero;

```
Uses Crt;
Var A,I,S:    Integer;
Begin
   Clrscr;
   A:=6; S:=0; I:=1;
   While (A<15) do
      Begin
         A:=A+I;
         S:=S+A;
         I:=I+2;
      End;
   Writeln(' A= ',A);
   Writeln('S= ',S);
   Readln;
End.
```

Tabella di traccia →						
	A=6	S=0	I=1	Controllo A<15	Esecuzione ciclo	Output
Passo				Vero	Si	
1	7	7	3	Vero	Si	
2	10	17	5	Vero	Si	
3	15	32	7	Falso	No	A= 15 S= 32

Torna su

Algebra

1) Per semplificare la frazione algebrica è necessario procedere alla scomposizione in fattori dei polinomi presenti al numeratore ed al denominatore.

Al numeratore si devono operare dei raccoglimenti parziali e successivamente un raccoglimento totale, quindi osservare la presenza del caso notevole della differenza di due quadrati.

Al denominatore, nel primo fattore si raccoglie il fattore 2, mentre il secondo fattore è lo sviluppo del quadrato di binomio $(x+y)^2$. Si ha pertanto

$$\frac{x^3+x^2y-a^2x-a^2y}{(2x-2a)\cdot(x^2+2xy+y^2)}=\frac{x^2(x+y)-a^2(x+y)}{2(x-a)(x+y)^2}=$$
$$\frac{(x^2-a^2)(x+y)}{2(x-a)(x+y)^2}=\frac{(x-a)(x+a)(x+y)}{2(x-a)(x+y)^2}=\frac{x+a}{2(x+y)}$$

con la condizione di equivalenza $x\neq a$. Torna su

2) I quozienti proposti sono dei casi notevoli, infatti si possono scrivere:

2.1) Il primo come differenza di due quadrati divisa per la differenza delle basi; è pertanto un quoziente esatto, cioè il resto della divisione è zero;

2.2) Il secondo si può scrivere come la differenza di due cubi divisa per la somma delle basi; in questo caso il quoziente non è esatto, ma il polinomio corrispondente si può scrivere immediatamente. Sussistono le seguenti espressioni:

$$(x^4-16y^2):(x^2-4y)=\left[(x^2)^2-(4y)^2\right]:(x^2-4y)=(x^2+4y)$$
$$\left(x^6-\frac{1}{8}\right):\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\left[(x^2)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$Q(x) = (x^2)^2 - (x^2)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$$

il resto è $R(x) = -\frac{1}{4}$

Torna su

3) L'equazione proposta è letterale fratta e per discuterla è necessario innanzitutto ricondurla alla forma normale. Si riportano i passaggi essenziali.

$$\frac{a}{a-x} = \frac{3}{x+2} + \frac{3}{ax - x^2 + 2a - 2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{a-x} - \frac{3}{x+2} - \frac{3}{(a-x)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{a-x} - \frac{3}{x+2} - \frac{3}{(a-x)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$ con $x \neq a$ ed $x \neq -2$ l'equazione diventa

$(a+3)x = a+3$

Discussione

3.1 Con $a \neq -3$ e $a \neq 1$ l'equazione è determinata; la soluzione è $x=1$.

3.2 Con $a=1$ la soluzione non è accettabile perché non è rispettata la condizione di esistenza $x \neq a$; quindi l'equazione è impossibile.

3.3 Con $a=-3$ l'equazione diventa un'identità: ammette come soluzione un qualsiasi numero reale, con esclusione dei valori **-3** e **-2**.

Torna su

4) Risolviamo il sistema di equazioni

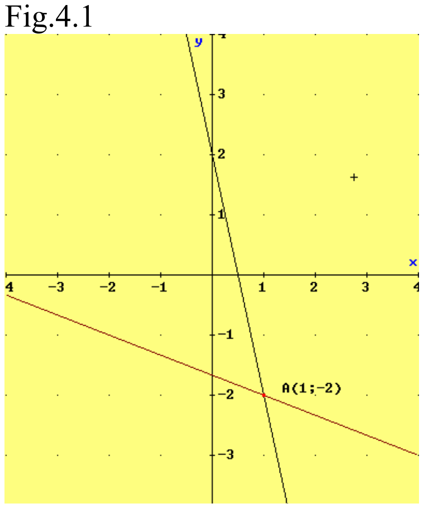
Il sistema ridotto alla forma normale è: $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$

Possiamo risolvere il sistema con il metodo di sostituzione, ricavando l'incognita y dalla prima equazione, sostituendola nella seconda e risolvendo quest'ultima nell'incognita residua x. Si ha:

$$\begin{cases} y = 2 - 4x \\ x + 3(2 - 4x) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ x - 12x = -5 - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Fig.4.1



Rappresentazione cartesiana della soluzione

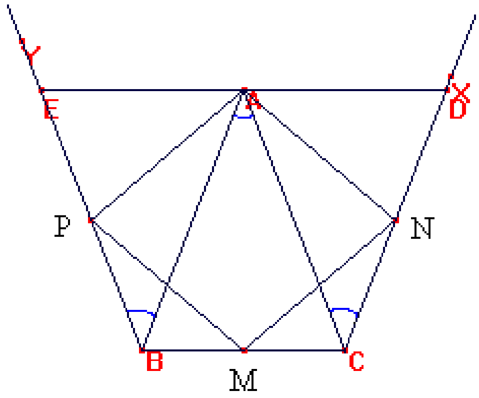
Come sappiamo nel piano cartesiano ad ogni equazione di primo grado in due variabili corrisponde una retta. Per il sistema di equazione in esame si tratta di rappresentare in un riferimento cartesiano ortogonale le due rette corrispondenti alle due equazioni del sistema. Quando il sistema è determinata i valori delle incognite che rappresentano la soluzione sono le coordinate del punto comune alle due rette. In Fig.4.1 sono rappresentate le due rette ed il punto A di intersezione.

Torna su

Geometria

La figura relativa al problema è riportata a lato.

ABC triangolo isoscele su BC
CD//AB,CD≅AB, BE//AC, BE≅AC



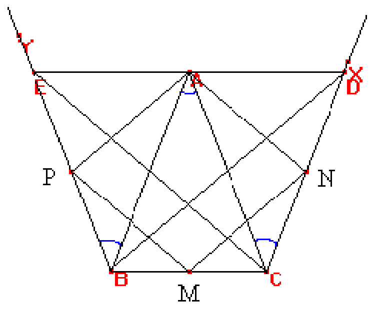
Tesi

1) per provare che i punti E,A,D sono allineati basta dimostrare che la somma dei tre angoli DAC, CAB, BAE è un angolo piatto. All'uopo consideriamo i tre triangoli ACD, ABC, ABE e dimostriamo che sono congruenti. Infatti:
   CD≅AB per ipotesi ed essendo inoltre CD//AB, considerando le rette [A,B], [C,D] tagliate dalla trasversale AC si deduce l'uguaglianza degli angoli BAC, ACD, i quanto formano una coppia di angoli alterni interni;
   analogamente risulta BE≅AC e BE//AC⇒glia angoli ABE, BAC sono congruenti. Ricordando che il triangolo ABC è isoscele sulla base BC, dunque AB≅AC, emerge che i tre triangoli considerati sono congruenti per il primo criterio (avendo ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso). Dalla congruenza dei triangoli si deducono le congruenze DAC≅ACB≅ABC≅EAB. Ricordato che "in un triangolo la somma degli angoli interni è pari ad un angolo piatto", avendosi DAC+CAB+BAE=ACB+ CAB+ABC=180° acquisiamo la tesi che i punti D,A,E sono allineati.

Torna su

2) Al fine di dimostrare che il quadrilatero BCDE è un trapezio isoscele osserviamo intanto che i due lati CD e BE sono tra loro congruenti per transitività: CD≅AB≅AC≅BE; d'altra parte si riconosce che le rette dei lati DE e BC sono parallele. Per questo basta osservare gli angoli congruenti DAC, ACB (ciò è stato dimostrato nel precedente punto) che formano anche una coppia di angoli alterni interni rispetto alla suddette rette tagliate dalla trasversale AC. Il quadrilatero è pertanto un trapezio in quanto ha due lati opposti paralleli (le basi BC, DE) e sono congruenti i lati obliqui CD, BE; dunque si tratta di un trapezio isoscele.

Torna su



3) I punti medi dei lati del trapezio sono:A, punto medio della base maggiore; M punto medio della base minore BC; N punto medio di CD, P punto medio di BE.
   Congiunti tali punti consecutivamente si ottiene il quadrilatero APMN. Si tratta di dimostrare che questo è un rombo, quindi un parallelogrammo con i lati congruenti.
   Ricordiamo che in un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti. Tracciando le diagonali BD, CE osserviamo che:
   relativamente al triangolo BCD, il segmento MN congiunge i punti medi dei lati BC, CD, per cui è parallelo al terzo lato BD e congruente alla metà di questo; analogamente il segmento AP congiunge i punti medi dei lati DE, BE del triangolo BDE, dunque è parallelo anch'esso a BD e congruente alla sua metà. Per transitività i due segmenti MN, AP sono paralleli e congruenti. Con ragionamento analogo, considerando i triangoli CDE, CBE si dimostra che i segmenti AN, MP sono paralleli alla diagonale CE e congruenti alla sua metà. Il quadrilatero APMN è dunque un parallelogramma per avere i lati opposti paralleli e, poiché BCDE è un trapezio isoscele ed abbiamo già precisato

che in tali trapezi le diagonali sono congruenti, ricaviamo che i quattro lati AP, PM, MN,NA sono congruenti e quindi il parallelogramma è anche rombo. C.V.D.

Torna su