*Verificare che la seguente equazione*

$$F(x,y) = x^3 - x^2y + xy^3 - y^3 - 1 = 0$$

*definisce una funzione* $y = f(x)$ *in un intorno di* $(1,0)$. *Calcolare la retta tangente alla curva* $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ *nel punto* $(1,0)$.

SOLUZIONE. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -x^2 + 3xy^2 - 3y^2,$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -1.$$

Essendo $F(1,0) = 0$ si ha, per il Teorema delle funzioni implicite, che esiste una funzione regolare $f\colon U \to \mathbb{R}$, con $U$ intorno di 1, tale per cui $F(x,y) = 0$ se e solo se $y = f(x)$ per ogni $x \in U$. Dunque $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in U$, da cui deriva

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

Ora $F(x, f(x)) = x^3 - x^2f(x) + xf^3(x) - f^3(x) - 1$, per cui derivando si ha

$$3x^2 - 2xf(x) - x^2f'(x) + f^3(x) + 3xf^2(x)f'(x) - 3f^2(x)f'(x) = 0.$$

Essendo $f(1) = 0$ si ha $3 - f'(1) = 0$, ossia $f'(1) = 3$. La retta tangente alla curva data in $(1,0)$ ha quindi equazione $y = 3(x-1)$.