Prova d'esame- Analisi matematica II

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = y + e^x y^3 \quad (1)$$

L'equazione in esame rientra nel tipo di equazioni dette di Bernoulli:

$$y' = a(x)y + b(x)\cdot\left[y(x)\right]^\alpha$$

La (1) si trasforma dividendo i due membri per $y^3 \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = e^x \quad (2)$$

La (2) si risolve effettuando la sostituzione di funzione ponendo

$$-\frac{1}{y^2} = z(x) \Leftrightarrow z(x) = -y(x)^{-2} \Rightarrow \quad (3)$$

$$z'(x) = 2\cdot y(x)^{-3}\cdot y'(x) \quad (4)$$

Sostituendo nella (2) le espressioni di $y(x)$ ed $y'(x)$ dedotte dalla (3) e dalla (4) e semplificando si ha:

$$z' + 2z = 2e^x \quad (5)$$

L'equazione (5) è lineare del primo ordine avente come termine noto una funzione esponenziale. Per risolvere la (5) di deve trovare la famiglia di funzioni

$$A(x) = \int 2dx = 2x + c \quad (5.1)$$

e moltiplicare i due membri per l'esponenziale $e^{A(x)}$; ciò fatto si riconosce che al primo membro figura la derivata della funzione

$$z(x)\cdot e^{A(x)}$$

Si ha:

$$e^{A(x)} = e^{2x+c} = ke^{2x}, \text{ con } k \in \mathbb{R}^+ \quad (5.2)$$

Moltiplichiamo ora i due membri delle (5) per $e^{A(x)} \Rightarrow$

$$\left[z' + 2z\right]\cdot ke^{2x} = 2e^x\cdot ke^{2x} \Leftrightarrow D\left(z(x)e^{2x}\right) = 2e^{3x}$$

Integrando nei due membri si perviene all'uguaglianza

$$\int D\left(z(x)e^{2x}\right)dx = \int 2e^{3x}dx \Rightarrow \qquad z(x)\cdot e^{2x} = \frac{2}{3}e^{3x} + c_1$$

e quindi

$$z(x) = \frac{2}{3}e^x + c_1 e^{-2x} \quad (5.3)$$

La famiglia di curve avente come equazione la (5.3) rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale (5).
In virtù della sostituzione (3) si risale all'integrale generale $y(x)$ dell'equazione (2) e quindi dell'equazione (1). La forma implicita è:

$$y^2(x) = -\frac{1}{z(x)} \Rightarrow \quad y^2(x) = -\frac{3}{2e^x + 3c_1 e^{-2x}} \quad (5.4)$$

Applicazione

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + e^x y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Partendo dall'integrale generale dell'equazione differenziale si deve determinare il valore della costante c_1 in modo che sia soddisfatta la condizione al contorno.

Poiché in un intorno del punto x=0 la funzione integrale soluzione del problema deve essere positiva perché $y(0)=1>0$ (si applica il teorema della permanenza del segno) scegliamo per l'integrale generale la forma esplicita

$$y(x)=\sqrt{-\frac{3}{2e^{x}+3c_1e^{-2x}}}$$

Valore della costante c_1

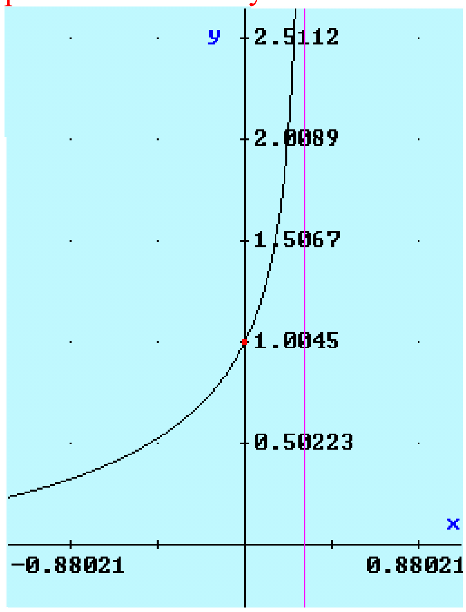
Il valore di c_1 si determina imponendo la condizione y(0)=1.

$$y(0)=\sqrt{-\frac{3}{2e^{0}+3c_1e^{-2\cdot 0}}}=\sqrt{-\frac{3}{2+3c_1}}=1\Rightarrow c_1=-\frac{5}{3}$$

La soluzione integrale è la curva la cui equazione è

$$y(x)=\sqrt{\frac{3}{5e^{-2x}-2e^{x}}}$$

Diagramma della soluzione del problema di Cauchy



Caratteristiche della funzione

La funzione $f(x)=\sqrt{\frac{3}{5e^{-2x}-2e^{x}}}$:

- ❖ è definita nell'intervallo $\left]-\infty;\frac{1}{3}\log\left(\frac{5}{2}\right)\right[$ ed è positiva;
- ❖ ha come asintoto verticale la retta di equazione $x=\frac{1}{3}\log\left(\frac{5}{2}\right)$ e come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse;
- ❖ la derivata prima è $f'(x)=\frac{3(5e^{-2x}+e^{x})}{\left(5e^{-2x}-2e^{x}\right)^{5/2}}$, che nel dominio della funzione è positiva, quindi la funzione è strettamente crescente e non ha né massimi, né minimi relativi.
- ❖ L'estremo superiore è Sup(f) = +∞ e l'estremo inferiore è Inf(f) = 0.