Studiare la conservatività del campo

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

SOLUZIONE. Il campo dato è definito e regolare su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è un insieme stellato. Vale comunque l'uguaglianza delle derivate in croce, infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Tale condizione però non equivale, anche in questo caso, alla conservatività del campo. Nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ un potenziale è dato dalla funzione

$$\Phi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

come si può verificare direttamente. In tutto il dominio invece $\vec{F}$ non è un campo conservativo. Infatti verifichiamo che esiste una curva chiusa che gira attorno al punto $(0,0)$ per la quale la circuitazione del campo non è 0. Sia C la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, percorsa una sola volta in senso antiorario. Allora si ha

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{j}\right)\cdot(-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j})dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi \neq 0.$$