

Siano $A, B > 0$. Studiare brevemente la curva spaziale $\vec{r}(t) = A \cos t \vec{i} + A \sin t \vec{j} + Bt \vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$; calcolare poi la lunghezza dell'arco parametrizzato nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

SOLUZIONE. La curva data ha per sostegno un'elica circolare cilindrica; si ha $\vec{r}'(t) = -A \sin t \vec{i} + A \cos t \vec{j} + B \vec{k}$, che non risulta mai nullo. Si ha poi

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 + B^2} dt = 2\pi \sqrt{A^2 + B^2}.$$