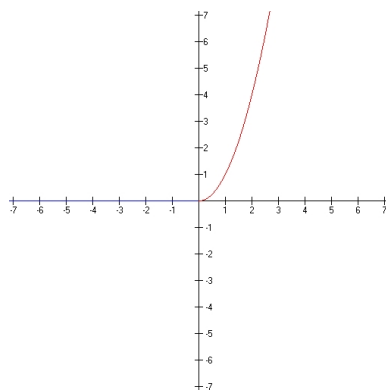


Discutere la derivabilità della seguente funzione definita su tutto \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Il grafico di f è dato da:



f è anzitutto continua; inoltre

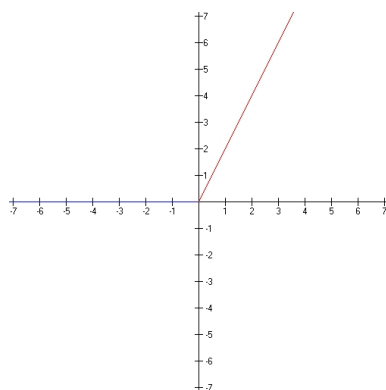
$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0,$$

quindi f è derivabile in $x = 0$ (altrove non vi sono problemi). Osserviamo che la funzione $f'(x)$ è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

il cui grafico è dato dal seguente:



Si ha quindi che f' è continua, ma non derivabile in $x = 0$; ne segue che f non ammette derivata seconda in $x = 0$.